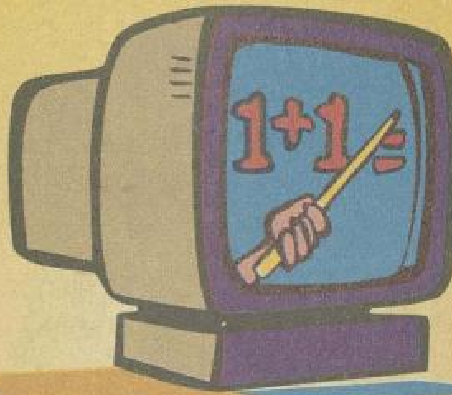
8

ریاضی

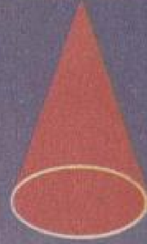
آٹھویں جماعت کے لیے



Specimen Copy
Not for Sale







%

÷

=





$\in$

×



+	0	1
0	0	1
1	1	10

$c^2 = a^2 + b^2$

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

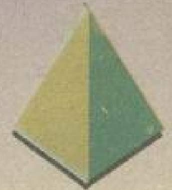
$\acute{A} = U - A$

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$



π

$\neq$



$111_2 + 101_2 = 1100_2$

سِندھ ٹیکسٹ بُک بورڈ، جام شورو



ریاضی

آٹھویں جماعت کے لیے

Specimen Copy
Not for Sale

سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو

پبلشرز

گابا سنز

اردو بازار ـــــ کراچی



تیار کردہ : سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ جام شورو سندھ
و منظور شدہ محکمۂ تعلیم صوبہ سندھ

بطور واحد درسی کتاب برائے مدارس صوبۂ سندھ
قومی کمیٹی برائے جائزہ کتب نصاب کی تصحیح شدہ

مصنّفین

محمد شریف   سید آفاق احمد

مُدیران

شمس الحق مغل   ارجن لعل

مطبع : گابا پریس کراچی



فہرست

بِسۡمِ اللّٰہِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِیۡمِ

پہلا باب

سیٹ

1.1 سیٹ

ہم ساتویں جماعت میں پڑھ چکے ہیں کہ واضح اشیاء کے اجتماع کو **سیٹ** کہتے ہیں۔ سیٹ کو انگریزی کے بڑے حروف تہجی مثلاً C، B، A وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ سیٹ کے ارکان کو درمیانی خطوط وحدانی "{ }" میں لکھا جاتا ہے اور انہیں نشان "," سے علیحدہ کیا جاتا ہے۔ سیٹ کے ارکان میں تکرار نہیں ہوتی اور سیٹ میں ارکان کی ترتیب کوئی اہمیت نہیں رکھتی۔

اگر x سیٹ A کا رُکن ہے تو اسے علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں:

$$x \in A$$

اسے اس طرح پڑھا جاتا ہے "x سیٹ A سے تعلق رکھتا ہے" یا "x سیٹ A میں موجود ہے"۔

اگر x سیٹ A کا رُکن نہ ہو تو علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں:

$$x \notin A$$

1.2 تحتی سیٹ

اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا بھی رکن ہو تو سیٹ A، سیٹ B کا تحتی سیٹ کہلاتا ہے۔ اسے علامتی طور پر یوں لکھا جاتا ہے:

$$A \subseteq B$$

کیونکہ سیٹ A، سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے اس لیے سیٹ B، سیٹ A کا **فوقی سیٹ** کہلاتا ہے۔ اسے علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں:

$$B \supseteq A$$

اگر سیٹ A، سیٹ B کا تحتی سیٹ نہ ہو تو اسے اس طرح لکھتے ہیں:

$$A \not\subseteq B$$

تحتی سیٹ کی تعریف سے یہ ظاہر ہے کہ:

1۔ خالی سیٹ ہر سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

2۔ ہر سیٹ اپنا ہی تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

مثلاً اگر A کوئی سیٹ ہے تو

$$A \subseteq A$$

مثال 1۔
اگر $A = \{1, 3, 5\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ تو بتائیں کون سا سیٹ کس سیٹ کا تحتی سیٹ ہے اور کون سا فوقی سیٹ ہے؟

حل:
کیونکہ سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا رکن ہے۔

اس لیے $A \subseteq B$

اور سیٹ B، سیٹ A کا فوقی سیٹ ہے یعنی

$$B \supseteq A$$

مثال 2۔
اگر $N = \varnothing$ اور $M = \{11, 12, 13\}$

تو کیا سیٹ N، سیٹ M کا تحتی سیٹ ہے؟

حل:

ہم جانتے ہیں کہ $\varnothing$ یعنی خالی سیٹ ہر سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔ لہٰذا

$$N \subseteq M$$

یا $\varnothing \subseteq M$

مثال 3۔
اگر $H = \{7, 8\}$ تو سیٹ H کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ معلوم کیجیے۔

حل:
کسی بھی دیے ہوئے سیٹ کے تمام تحتی سیٹوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے 2^n کا کلیہ استعمال کیا جاتا ہے۔ یہاں 'n' دیے ہوئے سیٹ کے ارکان کی تعداد ظاہر کرتا ہے۔

اوپر دی ہوئی مثال میں سیٹ H میں دو ارکان ہیں۔ لہٰذا سیٹ H کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں کی تعداد ہوگی:

$$2^2 = 4$$

ہم جانتے ہیں کہ خالی سیٹ ہر سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے اور ہر سیٹ اپنا ہی تحتی سیٹ ہوتا ہے۔ لہٰذا H کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ یہ ہیں:

$$\varnothing,\ \{7\},\ \{8\},\ \{7, 8\}$$

مثال 4۔ اگر $K = \{1,2,3\}$ تو سیٹ K کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ معلوم کیجیے۔

حل: $K = \{1,2,3\}$

یہاں سیٹ K کے ارکان کی تعداد 3 ہے۔ لہٰذا سیٹ K کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں کی تعداد ہوگی:

$$2^3 = 8$$

سیٹ K کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ یہ ہیں:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$$

1.3 واجب اور غیر واجب تحتی سیٹ

اگر

$$A = \{a,b,c\},$$

ہو تو سیٹ A کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ مندرجہ ذیل ہیں:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}.$$

تحتی سیٹ $\{a,b,c\}$ کا ہر رکن سیٹ A کا رکن ہے اور سیٹ A کا ہر رکن سیٹ $\{a,b,c\}$ کا رکن ہے۔ ایسی صورت میں سیٹ $\{a,b,c\}$، سیٹ A کا غیر واجب تحتی سیٹ ہے۔

بالفاظ دیگر "ہر سیٹ اپنا ہی تحتی سیٹ ہوتا ہے جو غیر واجب تحتی سیٹ کہلاتا ہے"۔

سیٹ A کے دیگر تمام تحتی سیٹ واجب تحتی سیٹ کہلاتے ہیں لہٰذا

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$$

سیٹ A کے واجب تحتی سیٹ ہیں۔ کیونکہ ان کا ہر رکن سیٹ A کا رکن ہے لیکن سیٹ A کا ہر رکن اِن کا رُکن نہیں ہے۔

واجب تحتی سیٹ کو علامت '$\subset$' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثلاً $\{c\} \subset A$

اور سیٹ A کے غیر واجب تحتی سیٹ $\{a,b,c\}$ کو یوں لکھتے ہیں:

$$\{a,b,c\} \subseteq A$$

مثال 1۔
اگر $A=\{10,11,12,13\}$ اور
$B=\{11,10,13,12\}$ ، $C=\{10,11,12\}$ ، $D=\{10,13\}$ سیٹ A کے تحتی سیٹ ہوں تو بتائیے کون سا تحتی سیٹ ، سیٹ A کا غیر واجب تحتی سیٹ ہے اور کون سے واجب تحتی سیٹ ہیں ؟

حل:
دیے ہوئے سیٹوں پر غور کرنے سے معلوم ہوا کہ

$B\subseteq A$

اور $A\subseteq B$

یعنی سیٹ A اور سیٹ B ایک دوسرے کے تحتی سیٹ ہیں۔ لہٰذا سیٹ B ، سیٹ A کا غیر واجب تحتی سیٹ ہے۔

اسی طرح $C\subseteq A$

لیکن $A\nsubseteq C$

لہٰذا $C\subset A$

اور $D\subseteq A$

لیکن $A\nsubseteq D$

لہٰذا $D\subset A$

یعنی سیٹ C اور D ، سیٹ A کے واجب تحتی سیٹ ہیں۔

مثال 2۔ اگر $G=\{a,b,c,d,e\}$ تو سیٹ G کا غیر واجب تحتی سیٹ اور تین واجب تحتی سیٹ لکھیے۔

حل:

$G=\{a,b,c,d,e\}$

سیٹ G کا غیر واجب تحتی سیٹ یہ ہے :

$\{a,b,c,d,e\}$

اور سیٹ G کے تین واجب تحتی سیٹ یہ ہیں :

$\{a,b,c\}$ ، $\{a,b,c,d\}$ ، $\{c,d,e\}$

1.4 مساوی سیٹ

اگر X اور Y کوئی دو سیٹ ہوں اور ان کے ارکان ایک جیسے ہوں نیز ان کی تعداد بھی برابر ہو تو X اور Y مساوی سیٹ کہلاتے ہیں۔

دوسرے الفاظ میں " اگر سیٹ X اور سیٹ Y ایک دوسرے کے تحتی سیٹ ہیں تو انہیں مساوی سیٹ کہتے ہیں "۔

مثلاً اگر $X = \{l,m,n\}$

اور $Y = \{n,l,m,\}$

تو کیونکہ $X \subseteq Y$

اور $Y \subseteq X$

پس $X = Y$

1.5 قوت سیٹ

اگر $A = \{1,2\}$ ہو تو

سیٹ A کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ یہ ہیں :

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$

سیٹ A کے تمام ممکنہ تحتی سیٹوں کا سیٹ قوت سیٹ کہلاتا ہے اور اسے علامتی طور پر P(A) لکھتے ہیں۔ یعنی

$P(A) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

اسی طرح خالی سیٹ کا قوت سیٹ $P(\emptyset)$ ہے یعنی

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

واضح رہے کہ خالی سیٹ کا قوت سیٹ خالی سیٹ نہیں ہوتا کیونکہ خالی سیٹ کے قوت سیٹ میں ایک رُکن موجود ہوتا ہے جو خود خالی سیٹ ہوتا ہے۔

مثال 1۔ اگر $D = \{a,b,c\}$ تو P(D) معلوم کیجیے۔

حل : $D = \{a,b,c\}$

سیٹ D کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ درج ذیل ہیں :

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

لہٰذا

$P(D) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

مشق 1.1

1 - مندرجہ ذیل سیٹوں کے جوڑوں میں کون سا سیٹ دوسرے سیٹ کا تحتی سیٹ ہے ؟

(i) $A = \{0,-1,-2\}$, $B = \{0,-1,-2,-3,-4\}$

(ii) $C = \{1,3,5,7,9,11\}$, $D = \{1,3,9,11\}$

(iii) $E = \{a,i,e,o,u\}$, $F = \{a,i,u\}$

(iv) $G = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ $H = \{1,3,5,7\}$

(v) $I = \{c,d,e,f\}$ $J = \{a,b,c,d,e,f\}$

2 - خالی جگہوں کو علامت $\subseteq$ یا $\not\subseteq$ سے پُر کیجیے :

(i) $\{2,4,5\}$ .... $\{2,4,6,8\}$ (ii) $\{1,2,3\}$ .... $\{1,2,3,4,5\}$

(iii) $\{a,b\}$ ... $\{a,b,c,d\}$ (iv) $\{1,3,5,7,9\}$ ..... $\{1,3,5\}$

(v) $\emptyset$ .... $\{2,4,5,7\}$

3 - مندرجہ ذیل ہر ایک سیٹ کے تین واجب تحتی سیٹ اور ایک غیر واجب تحتی سیٹ لکھیے :

(i) $A = \{2,4,6,8,10\}$ (ii) $B = \{a,b,c\}$

(iii) $K = \{21,23,25,27,29\}$ (iv) $L = \{11,12,13\}$

(v) $M = \{5,10,15,20\}$ (vi) $N = \{a,e,i,o,u\}$

4- مندرجہ ذیل سیٹوں کے دو، دو تحتی سیٹ لکھیے :

(i) $O = \{l,m,n\}$ (ii) $P = \{2\}$ (iii) $Q = \{0,1\}$

(iv) $R = \{1,3,5,7\}$ (v) $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ (vi) $T = \{-1, -2\}$

5- مندرجہ ذیل سیٹوں کے تین تین تحتی سیٹ لکھیے :

(i) $Y = \{m,n\}$ (ii) $X = \{5,10,15,20\}$ (iii) $A = \{a,b,c,\}$

(iv) $Z = \{3,4,5\}$ (v) $C = \{10,20\}$ (vi) $B = \{4,8,12,16\}$

6- مندرجہ ذیل سیٹوں کے تمام ممکنہ تحتی سیٹ لکھیے :

(i) $E = \{3,5\}$ (ii) $D = \{a\}$ (iii) $G = \{3,6,9,12\}$

(iv) $F = \{-1,0,1\}$ (v) $I = \{5\}$ (vi) $H = \emptyset$

7- مندرجہ ذیل سیٹوں میں سے کون کون سے سیٹ مساوی ہیں؟

(i) $A=\{1,2,3\}$ (ii) $B=\{g,f,e,d\}$ (iii) $C=\{2,3,1\}$
(iv) $D=\{a,b,c\}$ (v) $E=\{d,e,g,f\}$ (vi) $F=\{+,-,\div,\times\}$
(vii) $G=\{-1,-2,-3\}$ (viii) $H=\{a,c,b\}$ (ix) $I=\{-3,-1,-2\}$
(x) $J=\{\div,\times,+,-\}$ (xi) $P=\{3,2,1\}$ (xii) $Q=\{a,b,c\}$

8- مندرجہ ذیل سیٹوں کے قوت سیٹ معلوم کیجیے:

(i) $M=\{x,y\}$ (ii) $L=\{o\}$ (iii) $O=\{2,4,6,8\}$
(iv) $N=\{e,f,g\}$ (v) $R=\emptyset$ (vi) $Q=\{77,78\}$
(vii) $T=\{44,55,66\}$ (viii) $S=\{6,-6\}$ (ix) $Y=\{99\}$
(x) $X=\{1,2,3,4\}$ (xi) $A=\{-1,-2\}$ (xii) $B=\{+3,-4\}$

1.6 دو سیٹوں کا یونین (اتصال)

ہم ساتویں جماعت میں پڑھ چکے ہیں کہ " اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہوں تو ان کا یونین اُن تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو سیٹ A کے رکن ہوں یا سیٹ B کے رکن ہوں یا دونوں A اور B کے رکن ہوں" اِسے علامتی طور پر یوں لکھا جاتا ہے:

$$A \cup B$$

اور اسے پڑھتے ہیں: 'A یونین B'

مثال 1- اگر $A=\{1,2,3,5,7\}$ اور $B=\{2,5,6,8,9\}$

تو $A \cup B$ اور $B \cup A$ معلوم کیجیے۔

حل:

$A \cup B=\{1,2,3,5,7\} \cup \{2,5,6,8,9\}$

یا $A \cup B=\{1,2,3,5,6,7,8,9\}$

اور

$B \cup A=\{2,5,6,8,9\} \cup \{1,2,3,5,7\}$

یا $B \cup A=\{1,2,3,5,6,7,8,9\}$

مثال 2- اگر $C=\{1,2,3\}$ اور $D=\{4,5,9\}$

تو $C \cup D$ اور $D \cup C$ معلوم کیجیے۔

حل:
$C \cup D = \{1,2,3\} \cup \{4,5,9\}$

یا $C \cup D = \{1,2,3,4,5,9\}$

اور $D \cup C = \{4,5,9\} \cup \{1,2,3\}$

یا $D \cup C = \{1,2,3,4,5,9\}$

مثال 3۔ اگر $P = \{a,b,c,d,e,f\}$ اور $Q = \{a,e,i,o,u\}$

تو $P \cup Q$ اور $Q \cup P$ معلوم کیجیے۔

حل:
$P \cup Q = \{a,b,c,d,e,f\} \cup \{a,e,i,o,u\}$

یا $P \cup Q = \{a,b,c,d,e,f,i,o,u\}$

اور $Q \cup P = \{a,e,i,o,u\} \cup \{a,b,c,d,e,f\}$

یا $Q \cup P = \{a,b,c,d,e,f,i,o,u\}$

مثال 4۔ اگر $X = \{1,3,5,7,...\}$ اور $Y = \{2,4,6,8,...\}$

تو $X \cup Y$ اور $Y \cup X$ معلوم کیجیے۔

حل:
$X \cup Y = \{1,3,5,7,...\} \cup \{2,4,6,8,...\}$

یا $X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6,7,8,...\}$

اور $Y \cup X = \{2,4,6,8,...\} \cup \{1,3,5,7,....\}$

یا $Y \cup X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,.....\}$

مثال 5۔ اگر $L = \emptyset$ اور $M = \{1,2\}$ تو

$L \cup M$ اور $M \cup L$ معلوم کیجیے۔

حل:
$L \cup M = \emptyset \cup \{1,2\}$

یا $L \cup M = \{1,2\}$

اور $M \cup L = \{1,2\} \cup \{\ \}$

یا $M \cup L = \{1,2\}$

مندرجہ بالا مثالوں سے دو سیٹوں A اور B کے لیے مندرجہ ذیل نتیجہ اخذ کیا جا سکتا ہے:

$$A \cup B = B \cup A$$

یعنی دو سیٹوں کا یونین خاصیت مبادلہ رکھتا ہے۔

1.7 دوسیٹوں کا تقاطع

ہم ساتویں جماعت میں پڑھ چکے ہیں کہ " اگر A اور B کوئی سے دو سیٹ ہوں تو اُن کا تقاطع اُن تمام ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو سیٹ A اور B دونوں میں مشترک ہوں"۔

اِسے علامتی طور پر یوں لکھا جاتا ہے۔

$A \cap B$

اور اسے پڑھتے ہیں " A تقاطع B "

مثال 1. اگر $C = \{0,2,4,6,8\}$ اور $D = \{1,2,3,4,5\}$

تو $C \cap D$ اور $D \cap C$ معلوم کیجیے۔

حل: $C \cap D = \{0,2,4,6,8\} \cap \{1,2,3,4,5\}$

یا $C \cap D = \{2,4\}$

اور $D \cap C = \{1,2,3,4,5\} \cap \{0,2,4,6,8\}$

یا $D \cap C = \{2, 4\}$

مثال 2. اگر $N = \emptyset$ اور $M = \{1,2,3\}$

تو $N \cap M$ اور $M \cap N$ معلوم کیجیے۔

حل: $N \cap M = \emptyset \cap \{1,2,3\}$

یا $N \cap M = \emptyset$

اور $M \cap N = \{1,2,3\} \cap \emptyset$

یا $M \cap N = \emptyset$

مثال 3. اگر $K = \{7,8,9,10,11\}$ اور $L = \{21, 22, 24\}$

تو $K \cap L$ اور $L \cap K$ معلوم کیجیے۔

حل: $K \cap L = \{7,8,9,10,11\} \cap \{21,22,24\}$

یا $K \cap L = \emptyset$

اور $L \cap K = \{21, 22, 24\} \cap \{7,8,9,10,11\}$

یا $L \cap K = \emptyset$

یہاں واضح رہے کہ دونوں سیٹوں K اور L میں کوئی رُکن مشترک نہیں ہے۔ اس لیے ان کا تقاطع خالی سیٹ ہے۔

مثال 4۔ اگر $E = \{2,4,6,8,..\}$ اور $F = \{1,2,3,4,5,....\}$

تو $E \cap F$ اور $F \cap E$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$E \cap F = \{2,4,6,8,..\} \cap \{1,2,3,4,5,...\}$$

یا $E \cap F = \{2,4,6,8,...\}$

اور $F \cap E = \{1,2,3,4,5,...\} \cap \{2,4,6,8,...\}$

یا $F \cap E = \{2,4,6,8,...\}$

مندرجہ بالا مثالوں سے دو سیٹوں A اور B کے لیے مندرجہ ذیل نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے۔

$$\boxed{A \cap B = B \cap A}$$

یعنی دو سیٹوں کا تقاطع خاصیت مبادلہ رکھتا ہے۔

1.8 کائناتی سیٹ

کسی بھی زیرِ غور مسئلہ سے تعلق رکھنے والے تمام ارکان پر مشتمل سیٹ کو کائناتی سیٹ کہتے ہیں۔ کائناتی سیٹ کو عام طور پر "U" سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثلاً اگر ایسے مثبت جفت اعداد زیرِ غور ہوں جو 20 سے چھوٹے ہوں تو اس صورت میں کائناتی سیٹ یہ ہوگا:

$$U = \{2,4,6,8,10, ...,16,18\}$$

اسی طرح اگر ایسے مثبت طاق اعداد زیرِ غور ہوں جو 29 سے چھوٹے ہوں تو اس صورت میں کائناتی سیٹ یہ ہوگا:

$$U = \{1,3,5,7,9,11,13, . . .,27\}$$

اور اگر 1 سے 100 تک کے قدرتی اعداد زیرِ غور ہوں تو کائناتی سیٹ یہ ہوگا:

$$U = \{1,2,3, . . . ,100\}$$

1.9 دو سیٹوں کا فرق

ہم ساتویں جماعت میں پڑھ چکے ہیں کہ "دو سیٹوں A اور B کا فرق ایسا سیٹ ہے جو اُن ارکان پر مشتمل ہوتا ہے جو سیٹ A میں ہوں لیکن سیٹ B میں نہ ہوں"۔ اسے علامتی طور پر یوں ظاہر کرتے ہیں: $A - B$ یا $A \backslash B$

مثال 1۔ اگر $A = \{1,2,3,4,5\}$ اور $B = \{2,4,6,8\}$

تو $A-B$ اور $B-A$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$A-B = \{1,3,5\}$$

اور $B-A = \{6,8\}$

مثال 2۔ اگر $A = \{2,3,4\}$ اور $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

تو $A-B$ اور $B-A$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$A-B = \{\ \}$$

یہاں دونوں سیٹوں کا فرق خالی سیٹ ہے۔ کیونکہ سیٹ A، سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے۔

اور $B-A = \{1,5,6\}$

مثال 3۔ اگر $C = \emptyset$ اور $D = \{9, 10\}$

تو $C-D$ اور $D-C$ معلوم کیجیے۔

حل:

$$C-D = \emptyset$$

اور $D-C = \{9,10\}$

مندرجہ بالا مثالوں سے ایک اہم نتیجہ اخذ ہوتا ہے کہ $A-B$ اور $B-A$ غیر مشترک سیٹ ہوتے ہیں یعنی

$$\boxed{A-B \neq B-A}$$

1.10 سیٹ کا کمپلیمنٹ

اگر U ایک کائناتی سیٹ ہو اور سیٹ A اُس کا تحتی سیٹ ہو تو ایسا سیٹ جو کائناتی سیٹ کے اُن تمام ارکان پر مشتمل ہو جو سیٹ A میں نہ ہوں، سیٹ A کا کمپلیمنٹ سیٹ کہلاتا ہے اور اسے A' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

یعنی

$$\boxed{A' = U-A}$$

مثال 1. اگر $U = \{0,1,2,.....,10\}$ اور $A = \{2,4,6,8,10\}$
تو A' معلوم کیجیے اور نیز $A \cup A'$ اور $A \cap A'$ معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ $A' = U - A$

لہٰذا $A' = \{0,1,3,5,7.9\}$

اور $A \cup A' = \{2,4,6,8,10\} \cup \{0,1,3,5,7,9\}$

یا $A \cup A' = \{0,1,2,3,4,5,6,7.8,9,10\}$

یا $A \cup A' = U$

اور $A \cap A' = \{2,4,6,8,10\} \cap \{0,1,3,5,7,9\}$

یا $A \cap A' = \{\ \}$

یا $A \cap A' = \emptyset$

مندرجہ بالا مثال سے دو اہم نتائج اخذ کیے جا سکتے ہیں:

(1) کسی دیے ہوئے سیٹ A اور اس کے کمپلیمنٹ سیٹ A' کا یونین کائناتی سیٹ U ہوتا ہے۔یعنی

$$A \cup A' = U$$

(2) کوئی دیا ہوا سیٹ A اور اس کا کمپلیمنٹ A' دونوں غیر مشترک ہوتے ہیں یعنی

$$A \cap A' = \emptyset$$

مثال 2. اگر $U = \{a,b,c,d,e\}$ اور $A = \emptyset$
تو A' اور U' معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ $A' = U - A$

یا $A' = U$

یا $\emptyset' = U$

اور $U' = U - U$

یا $U' = \{\ \}$

یا $U' = \emptyset$

مندرجہ بالا مثال سے بھی دو اہم نتائج اخذ کیے جا سکتے ہیں:

(1) خالی سیٹ کا کمپلیمنٹ سیٹ کائناتی سیٹ ہوتا ہے۔ یعنی

$$\phi' = U$$

(2) کائناتی سیٹ کا کمپلیمنٹ سیٹ خالی سیٹ ہوتا ہے یعنی

$$U' = \phi$$

مثال 3- اگر $U = \{1,2,3,4, \ldots ,20\}$

$P = \{2,4,6,8, \ldots,20\}$ اور $L = \{3,6,9,12,15,18\}$

تو مندرجہ ذیل کے ارکان معلوم کیجیے:

(i) P' (ii) L' (iii) $(P-L)'$ (iv) $P' \cap L'$

حل:

(i) کیونکہ $P' = U - P$

یا $P' = \{1,3,5,7, \ldots,19\}$

(ii) کیونکہ $L' = U - L$

یا $L' = \{1, 2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20\}$

(iii) $P - L = \{2,4,8,10,14,16,20\}$

کیونکہ $(P-L)' = U - (P-L)$

یا $(P-L)' = \{1,3,5,6, 7,9,11,12,13, 15,17,18,19\}$

(iv) $P' = \{1,3,5,7, \ldots ,19\}$

اور $L' = \{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20\}$

تو $P' \cap L' = \{1,5,7, 11,13,17,19\}$

مشق 1.2

1- اگر $A=\{2,3,5,7\}$ ، $B=\{2,5,8,10\}$
اور $C=\{3,4,5,6\}$ تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے ارکان معلوم کیجیے۔

(i) $B\cup C$ (ii) $A\cup C$ (iii) $A\cup B$
(iv) $C\cup A$ (v) $C\cup B$ (vi) $B\cup A$
(vii) کیا $A\cup C = C\cup A$؟ (viii) کیا $A\cup B = B\cup A$؟
(ix) کیا $B\cup C = C\cup B$؟

2- اگر $K=\{1,2,3,......,8\}$ ، $L=\{1,2,3,4\}$
اور $M=\{2,4,6,8\}$ تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے ارکان معلوم کیجیے۔

(i) $L\cap M$ (ii) $K\cap M$ (iii) $K\cap L$
(iv) $M\cap L$ (v) $M\cap K$ (vi) $L\cap K$
(vii) کیا $K\cap M = M\cap K$؟ (viii) کیا $K\cap L = L\cap K$؟
(ix) کیا $L\cap M = M\cap L$؟

3- مندرجہ ذیل سیٹوں کے لیے $P\cap L$ ، $L\cap P$ ، $L\cup P$ اور $P\cup L$ معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ $P\cap L = L\cap P$ اور $P\cup L = L\cup P$

(i) $P=\{6,7,8,9,10\}$, $L=\{1,2,3,4,5,6\}$
(ii) $P=\{a,e,i,o,u\}$ $L=\{a,b,c,d\}$
(iii) $P=\{1,3,5,7,....,19\}$, $L=\{2,4,6,8,....,20\}$
(iv) $P=\{3,6,9,12,15,18\}$, $L=\{5,10,15,20,25,30\}$
(v) $P=\{2,4,6,8,10,12\}$, $L=\{4,8,12,16,20,24\}$
(vi) $P=\{1,2,3,...,10\}$, $L=\{-1,-2,-3,......,-10\}$
(vii) $P=\{0,1,2,3,.....\}$, $L=\{1,2,3,4,.....\}$
(viii) $P=\{-1,-2,-3,.....\}$, $L=\{ ... ,-3,-2,-1,0,1,2,3,....\}$
(ix) $P=\varnothing$ $L=\{x,y,z\}$

(x) $P = \{8, 16, 24, 32, ..., 80\}$, $L = \{4, 8, 12, 16, ..., 40\}$

-4 اگر $M = \{11, 13, 15, 17, 19\}$, $L = \{11, 12, 13, 14, 15\}$

اور $K = \{12, 14, 16, 18, 20\}$ تو مندرجہ ذیل کے ارکان معلوم کیجیے :

(i) $M - K$ (ii) $L - K$ (iii) $L - M$

(iv) $K - M$ (v) $K - L$ (vi) $M - L$

-5 اگر $U = \{20, 21, 22, ..., 30\}$

$A = \{20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30\}$ اور $B = \{21, 23, 25, 27, 29\}$

تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے ارکان معلوم کیجیے :

(i) U' (ii) B' (iii) A'

(iv) $(B')'$ (v) $(A')'$ (vi) $(U')'$

-6 اگر $U = \{1, 2, 3, 4, ..., 20\}$

$G = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$H = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

اور $K = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے ارکان معلوم کیجیے :

(i) K' (ii) H' (iii) G'

(iv) $(G - K)'$ (v) $(H - K)'$ (vi) $(G - H)'$

(vii) $U - H'$ (viii) $U - G'$ (ix) $U - K'$

(x) $G' - K'$ (xi) $K' - H'$ (xii) $H' - G'$

-7 اگر $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، $P = \{a, e, f, g\}$

اور $Q = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ تو مندرجہ ذیل سیٹوں کے ارکان معلوم کیجیے :

(i) $P' \cap Q'$ (ii) $P' \cup Q'$ (iii) $(P \cap Q)'$

(iv) $(P \cup Q)'$ (v) $P \cup Q'$ (vi) $P' \cap Q$

دوسرا باب

سمتی اعداد اور ناطق اعداد کا نظام

2.1 سمتی اعداد یا صحیح اعداد

ہم چھٹی جماعت میں پڑھ چکے ہیں کہ

$+1, +2, +3, +4, \ldots$

مثبت سمتی اعداد ہیں اور

$-1, -2, -3, -4, \ldots$

منفی سمتی اعداد ہیں۔ جب کہ صفر '0' نہ مثبت عدد ہے اور نہ ہی منفی۔
اب اگر ہم مثبت سمتی اعداد کے سیٹ

$\{+1, +2, +3, +4, \ldots\}$

منفی سمتی اعداد کے سیٹ

$\{-1, -2, -3, -4 \ldots\}$

اور صفر پر مشتمل سیٹ $\{0\}$ کے یونین کو Z سے ظاہر کریں تو

$Z = \{+1, +2, +3, +4, \ldots\} \cup \{-1, -2, -3, -4, \ldots\} \cup \{0\}$

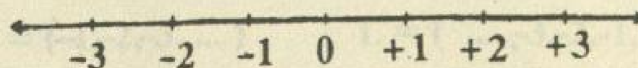
یا

$Z = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

سیٹ Z کو صحیح اعداد کا سیٹ کہتے ہیں۔ اور اس کے ارکان یعنی مثبت اعداد، منفی اعداد اور صفر کو صحیح اعداد (Integers) کہا جاتا ہے۔
مثبت صحیح اعداد کو عام طور پر + کی علامت کے بغیر بھی لکھا جاتا ہے۔ مثلاً 1 +، 2 +، 3 + وغیرہ کو بالترتیب 1، 2، 3 لکھا جاتا ہے۔

2.2 اعداد کی مطلق قیمت

ہم جانتے ہیں سمتی اعداد کو عددی خط پر ظاہر کیا جا سکتا ہے اور عددی خط پر نقاط کے لاتعداد جوڑے اس طرح واقع ہوتے ہیں کہ وہ مبداء (Origin) سے مساوی فاصلے پر ہوں۔



مثلاً اس عددی خط پر 1+ کا 0 سے فاصلہ 1 (ایک اکائی) ہے۔ اور 1- کا 0 سے فاصلہ بھی 1 (ایک اکائی) ہے۔ لہٰذا 1+ اور 1- کی مطلق قیمت 1 ہوتی ہے۔

اسی طرح 3+ کا 0 سے فاصلہ 3 (تین اکائیاں) ہے۔ اور 3- کا 0 سے فاصلہ بھی 3 (تین اکائیاں) ہے۔ لہٰذا 3+ اور 3- کی مطلق قیمت 3 ہوتی ہے۔

مطلق قیمت دو متوازی عمودی خطوط " | | " کی علامت سے ظاہر کی جاتی ہے۔

اس لیے $|+1| = 1$ ، $|-1| = 1$

اور $|+3| = 3$ ، $|-3| = 3$

ان مثالوں سے مندرجہ ذیل نتیجہ اخذ کیا جا سکتا ہے :

"ہر غیر صفر سمتی عدد (یا صحیح عدد) کی مطلق قیمت ہمیشہ مثبت عدد ہوتی ہے"

یعنی اگر x ایک مثبت عدد ہو تو

$$|+x| = +x$$

اور اگر x ایک منفی عدد ہو تو

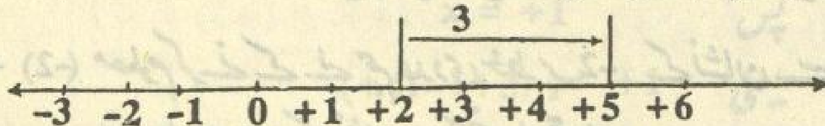
$$|-x| = +x$$

2.3 سمتی اعداد کی جمع

مندرجہ ذیل مثالوں میں عددی خط کے ذریعے سمتی اعداد کی جمع کے عمل کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال 1- 2+ اور 3+ کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

حل : $(+2) + (+3) = \square$



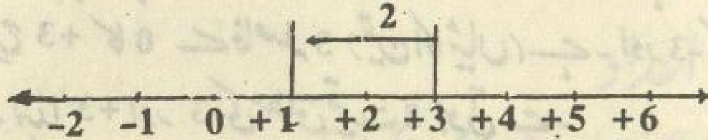
2+ میں 3+ کرنے کے لیے ہم عددی خط پر 2+ کے نشان سے 3 اکائیاں دائیں جانب بڑھتے ہیں اور اس طرح 5+ کے نشان پر پہنچ جاتے ہیں۔ 5+ دیے ہوئے سمتی اعداد کا مجموعہ ہے۔

چنانچہ $(+2) + (+3) = +5$

مثال 2۔ حل کیجیے:

$$(+3) + (-2) = \square$$

حل:



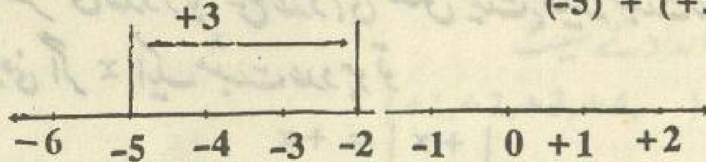
3+ میں 2- جمع کرنے کے لیے ہم عددی خط پر 3+ کے نشان سے 2 اکائیاں بائیں جانب بڑھتے ہیں اور اس طرح 1+ کے نشان پر پہنچ جاتے ہیں۔

چنانچہ $(+3) + (-2) = +1$

مثال 3۔ حل کیجیے:

$$(-5) + (+3) = \square$$

حل:



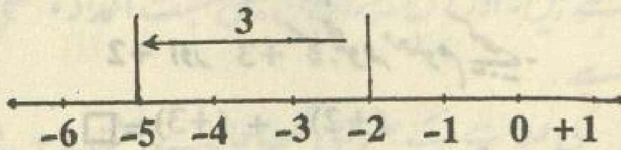
(3+) + (5-) معلوم کرنے کے لیے ہم عددی خط پر 5- کے نشان سے 3 اکائیاں دائیں جانب بڑھتے ہیں اور اس طرح 2- کے نشان پر پہنچ جاتے ہیں۔

چنانچہ $(-5) + (+3) = -2$

مثال 4۔ حل کیجیے:

$$(-2) + (-3) = \square$$

حل:



(3-) + (2-) معلوم کرنے کے لیے ہم عددی خط پر 2- کے نشان سے 3 اکائیاں بائیں جانب بڑھتے ہیں۔ اور اس طرح 5- کے نشان پر پہنچ جاتے ہیں۔

چنانچہ $(-2) + (-3) = -5$

مندرجہ بالا مثالوں پر غور کرنے سے ہمیں دو اعداد کی جمع کے لیے مندرجہ ذیل اصول حاصل ہوتے ہیں:

(i) اگر دونوں اعداد مثبت یا منفی ہوں تو اِن اعداد کی مطلق قیمتوں کو جمع کر لیا جاتا ہے اور مجموعے کے ساتھ اِن اعداد کی مشترک علامت لگا دی جاتی ہے۔ (دیکھیے مثال 1 اور مثال 4)

(ii) اگر ایک عدد مثبت اور دوسرا منفی ہو تو ان اعداد کی مطلق قیمتوں کا فرق معلوم کر لیا جاتا ہے اور فرق کے ساتھ بڑی مطلق قیمت والے عدد کی علامت لگا دی جاتی ہے۔ (دیکھیے مثال 2 اور 3)۔

2.4 سمتی اعداد کی تفریق

مندرجہ ذیل مثالوں میں عددی خط کے ذریعے سمتی اعداد کو تفریق کرنے کے عمل کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال 1۔ 4+ میں سے 3+ تفریق کیجیے۔

حل: $(+4)-(+3) = \square$

$(+4)-(+3)$ کو "مثبت چار نفی مثبت تین" پڑھتے ہیں۔

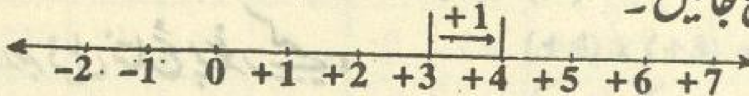
قدرتی اعداد کی جمع کے سلسلہ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$$7-5 = 2$$

کیونکہ $2 + 5 = 7$

اس اصول کو سمتی اعداد کی تفریق میں بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس اصول کے مطابق $(+4)$ اور $(+3)$ کا حاصل تفریق سمتی عدد x ہوتا ہے بشرطیکہ $x+(+3)$ کا مجموعہ 4+ ہو۔

اب x معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ عددی خط پر 3+ سے کتنی اکائیاں کس جانب بڑھا جائے کہ 4+ پر پہنچ جائیں۔



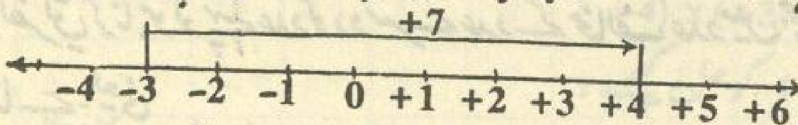
ظاہر ہے کہ اس کے لیے ہمیں ایک اکائی دائیں جانب بڑھنا ہوتا ہے۔

پس $x = +1$

یعنی $(+4)-(+3) = +1$

مثال 2۔ $(+4)-(-3)$ معلوم کیجیے۔

حل: ہمیں معلوم کرنا ہے کہ 3- سے کس جانب کتنا بڑھیں کہ 4+ پر پہنچ جائیں۔



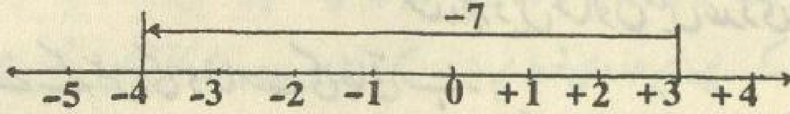
شکل سے ظاہر ہے کہ اس کے لیے ہمیں دائیں جانب 7 اکائیاں بڑھنا ہوتا ہے۔ لہٰذا

$$(+4)-(-3) = +7$$

مثال 3۔ حل کیجیے:

$$(-4) - (+3) = \square$$

حل: اس سوال میں یہ معلوم کرنا ہے کہ 3+ سے کس جانب کتنی اکائیاں بڑھیں کہ 4- پر پہنچ جائیں۔



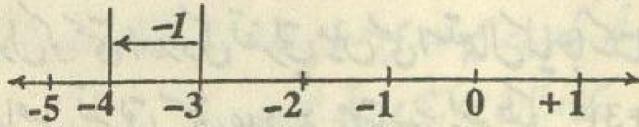
ظاہر ہے کہ اس کے لیے ہمیں 7 اکائیاں بائیں جانب بڑھنا ہوتا ہے۔ لہٰذا

$$(-4) - (+3) = -7$$

مثال 4۔ حل کیجیے:

$$(-4) - (-3) = \square$$

حل: یہاں ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ 3- سے کس جانب کتنی اکائیاں بڑھیں کہ 4- پر پہنچ جائیں۔



ظاہر ہے کہ اس کے لیے ہمیں 1 اکائی بائیں جانب بڑھنا ہے۔ لہٰذا

$$(-4) - (-3) = -1$$

اب مندرجہ ذیل نتائج پر غور کیجیے:

I	II
$(+4) - (+3) = +1$	$(+4) + (-3) = +1$
$(+4) - (-3) = +7$	$(+4) + (+3) = +7$
$(-4) - (+3) = -7$	$(-4) + (-3) = -7$
$(-4) - (-3) = -1$	$(-4) + (+3) = -1$

نتائج I اور II کے تقابل سے ہمیں یہ معلوم ہوا کہ اگر ایک سمتی عدد میں سے دوسرے سمتی عدد کو تفریق کرنا ہو تو پہلے عدد کو دوسرے عدد کے مخالف عدد میں جمع کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔ یعنی

اگر x اور y کوئی سے دو سمتی عدد ہوں تو

$$x - y = x + (-y)$$

چنانچہ

$$(+16) - (+10) = (+16) + (-10) = +6$$
$$(+15) - (-5) = (+15) + (+5) = +20$$
$$(-12) - (+10) = (-12) + (-10) = -22$$
$$(-10) - (-8) = (-10) + (+8) = -2$$

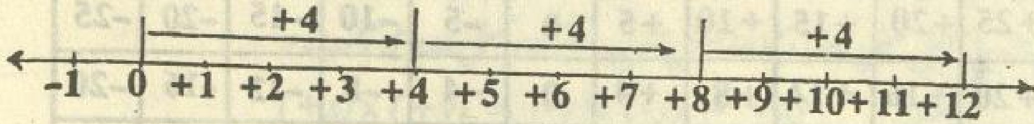
2.5 سمتی اعداد کی ضرب

مندرجہ ذیل مثالوں میں عددی خط کے ذریعے سمتی اعداد کی ضرب کے عمل کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال 1۔ حل کیجیے :

$$(+4) \times (+3)$$

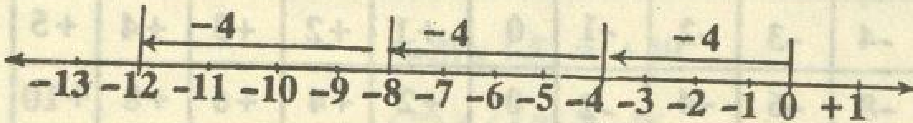
حل : ہم جانتے ہیں ضرب کا عمل ایک ہی عدد کو مسلسل جمع کرنے کے مترادف ہے چونکہ مضروب فیہ 3 ہے اور اس کی علامت '+' ہے۔ اس لیے $(+4) \times (+3)$ کا مطلب یہ ہوتا ہے کہ 4+ کی مطلق قیمت کو 4+ ہی کی سمت میں 3 مرتبہ جمع کرنا ہے۔



پس $(+4) \times (+3) = +12$

مثال 2۔ $(-4) \times (+3)$ کو حل کیجیے :

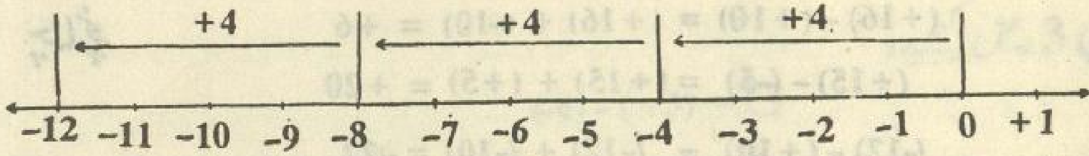
حل : چونکہ مضروب فیہ 3 کی علامت '+' ہے۔ اس لیے $(-4) \times (+3)$ کا مطلب یہ ہے کہ 4- کی مطلق قیمت کو 4- ہی کی سمت میں 3 مرتبہ جمع کرنا ہے۔



پس $(-4) \times (+3) = -12$

مثال 3۔ $(+4) \times (-3)$ کو حل کیجیے :

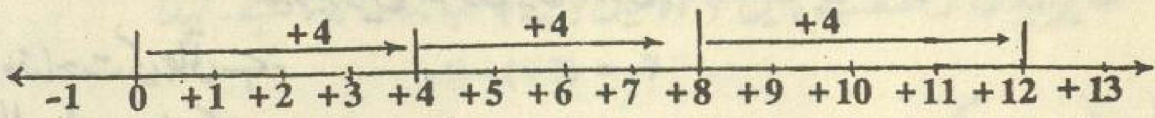
حل : چونکہ مضروب فیہ 3 کی علامت '—' ہے اس لیے $(+4) \times (-3)$ کا مطلب یہ ہے کہ 4+ کی مطلق قیمت کو 4+ کی مخالف سمت میں 3 مرتبہ جمع کرنا ہے۔



پس $(+4) \times (-3) = -12$

مثال 4۔ $(-3) \times (-4)$ کو حل کیجیے

حل: چونکہ مضروب فیہ 3 کی علامت '-' ہے۔ اس لیے $(-4) \times (-3)$ کا مطلب یہ ہے کہ 4- کی مطلق قیمت کو 4- کی مخالف سمت میں 3 مرتبہ جمع کرنا ہے۔



پس $(-4) \times (-3) = +12$

مندرجہ بالا مثالوں میں بیان کردہ طریقے کے مطابق مختلف سمتی اعداد کو ضرب دے کر مندرجہ ذیل جدول حاصل کی جا سکتی ہے۔

×	+5	+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4	-5
+5	+25	+20	+15	+10	+5	0	-5	-10	-15	-20	-25
+4	+20	+16	+12	+8	+4	0	-4	-8	-12	-16	-20
+3	+15	+12	+9	+6	+3	0	-3	-6	-9	-12	-15
+2	+10	+8	+6	+4	+2	0	-2	-4	-6	-8	-10
+1	+5	+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4	-5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
-2	-10	-8	-6	-4	-2	0	+2	+4	+6	+8	+10
-3	-15	-12	-9	-6	-3	0	+3	+6	+9	+12	+15
-4	-20	-16	-12	-8	-4	0	+4	+8	+12	+16	+20
-5	-25	-20	-15	-10	-5	0	+5	+10	+15	+20	+25

جدول میں دوسری قطار کا پہلا عدد 25+ ہے جو کہ 5+ اور 5+ کا حاصل ضرب ہے۔

یعنی $(+5) \times (+5) = +25$

یا $5 \times 5 = 25$

اور آخری قطار کا آخری عدد بھی 25+ ہے جو کہ 5- اور 5- کا حاصل ضرب ہے۔

یعنی $(-5) \times (-5) = +25$

اسی طرح $(+3) \times (+5) = +15$

اور $(-3) \times (-5) = +15$

جدول میں تیسری قطار کا آخری عدد 20- ہے جو کہ 4+ اور 5- کا حاصل ضرب ہے۔

یعنی $(+4) \times (-5) = -20$

اور آخری قطار میں دوسرا عدد بھی 20- ہے جو کہ 5+ اور 4- کا حاصل ضرب ہے۔

یعنی $(-5) \times (+4) = -20$

اسی طرح $(-4) \times (+5) = -20$

اور $(+5) \times (-4) = -20$

مندرجہ بالا مثالوں سے مندرجہ ذیل نتائج اخذ ہوتے ہیں:

(i) دو مثبت یا منفی سمتی اعداد کا حاصل ضرب مثبت سمتی عدد ہوتا ہے۔

یعنی $(+x) \times (+y) = (-x) \times (-y) = +xy$

(ii) اگر ایک سمتی عدد مثبت اور دوسرا منفی ہو تو ان کا حاصل ضرب منفی سمتی عدد ہوتا ہے۔

یعنی $(-x) \times (+y) = -xy$

اور $(+x) \times (-y) = -xy$

مثلاً $(+6) \times (+7) = +42$

$(-8) \times (-5) = +40$

$(-7) \times (+8) = -56$

$(+9) \times (-10) = -90$

2.6 سمتی اعداد کی تقسیم

ہم جانتے ہیں تقسیم کا عمل ضرب کے عمل کے الٹ ہوتا ہے۔ اس لیے ہم حقیقی ضرب کی مدد سے سمتی اعداد کی تقسیم سیکھ سکتے ہیں۔

مثال 1۔

$$(+20) \times (+5) = +(20 \times 5)$$
$$= +100$$

اس لیے $(+100) \div (+20) = +5$

اور $(+100) \div (+5) = +20$

مثال 2۔

$$(-10) \times (-12) = +(10 \times 12)$$
$$= +120$$

اس لیے $(+120) \div (-10) = -12$

اور $(+120) \div (-12) = -10$

مثال 3۔

$$(+5) \times (-8) = -40$$

اس لیے

$(-40) \div (+5) = -8$

اور $(-40) \div (-8) = +5$

مثال 4۔

$$(-7) \times (+14) = -98$$

اس لیے

$(-98) \div (-7) = +14$

اور $(-98) \div (+14) = -7$

مندرجہ بالا مثالوں سے مندرجہ ذیل نتائج اخذ کیے جا سکتے ہیں ؛

(i) $(+pq) \div (+p) = +q$ (ii) $(+pq) \div (+q) = +p$

(iii) $(+pq) \div (-p) = -q$ (iv) $(+pq) \div (-q) = -p$

(v) $(-pq) \div (-p) = +q$ (vi) $(-pq) \div (-q) = +p$

(vii) $(-pq) \div (+p) = -q$ (viii) $(-pq) \div (+q) = -p$

مشق 2.1

1. مندرجہ ذیل سیٹوں کو اندراجی طریقے سے لکھیے :

(i) پہلے دس صحیح اعداد کا سیٹ
(ii) پہلے آٹھ مثبت سمتی اعداد کا سیٹ
(iii) ‎-10 سے بڑے منفی سمتی اعداد کا سیٹ
(iv) ‎+10 سے چھوٹے مثبت سمتی اعداد کا سیٹ
(v) ‎-8 اور ‎+8 کے درمیان صحیح اعداد کا سیٹ

2. خالی جگہ پر علامت > یا < لکھیے :

(i) +2 — -2 (ii) -4 — -8 (iii) 0 — +1

(iv) -1 — 0 (v) -6 — +2 (vi) -400 — +5

3. مندرجہ ذیل اعداد کو عددی خط کی مدد سے جمع کیجیے۔

(i) +3, +6 (ii) +8, -5 (iii) -4, -2

(iv) -7, +3 (v) 0, -6 (vi) +6, -6

4. دیے ہوئے اعداد کو جمع کیجیے :

(i) +2, +8 (ii) +26, -10 (iii) -14, +4

(iv) -16, -5 (v) -40, 0 (vi) 0, +20

5. مندرجہ ذیل میں پہلے عدد میں سے دوسرے عدد کی تفریق عددی خط کی مدد سے کیجیے :

(i) +5, +2 (ii) +3, +6 (iii) +7, -4

(iv) -3, +8 (v) 0, -4 (vi) -5, -2

6. مندرجہ ذیل میں پہلے عدد میں سے دوسرے عدد کو تفریق کیجیے :

(i) +18 +6 (ii) +12, -8 (iii) -10, +15

(iv) -16, -20 (v) -20, +14 (vi) +17, -27

7- دیے ہوئے اعداد کا حاصل ضرب معلوم کیجیے:

(i) −9, +12 (ii) +30, +4 (iii) −8, −15

(iv) +10, −14 (v) −12, 0 (vi) +5, −200

8- مندرجہ ذیل میں پہلے عدد کو دوسرے عدد سے تقسیم کیجیے:

(i) +24, +6 (ii) +150, −10 (iii) −80, +16

(iv) −140, −7 (v) 0, +4 (vi) −18, −18

9- مختصر کیجیے:

(i) (+14) − (+15) (ii) (−25) + (−10)

(iii) (−12) + (+18) (iv) (−40) − (+30)

(v) (−35) − (−1) (vi) (+16) − (−28)

(vii) 0 − (−14) (viii) 0 + (−1)

(ix) −8 x [(−1) x (−3)] (x) [(−40) ÷ (+10)] ÷ (−4)

2.7 ناطق اعداد

ہم جانتے ہیں کہ قدرتی اعداد کا سیٹ اعداد

1, 2, 3, 4,...

پر مشتمل ہوتا ہے اور صحیح اعداد کا سیٹ

..., −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3,...

اعداد پر مشتمل ہوتا ہے۔ قدرتی اعداد کے سیٹ میں جمع اور ضرب کے عمل ہمیشہ ممکن ہیں لیکن تفریق اور تقسیم کے عمل ہمیشہ ممکن نہیں ہیں۔ اسی طرح صحیح اعداد کے سیٹ میں جمع، تفریق اور ضرب کے عمل ہمیشہ ممکن ہیں لیکن تقسیم کا عمل اس میں بھی ممکن نہیں ہے۔ اس لیے بعض اوقات ایسے مسائل پیش آتے ہیں جو کہ ان اعداد کی مدد سے حل نہیں کیے جا سکتے۔ چنانچہ اس کمی کو پورا کرنے کے لیے ناطق اعداد کا سیٹ دریافت ہوا۔

اب مندرجہ ذیل اعداد کو دیکھیے جو کہ کسی دوسرے عدد سے تقسیم کر کے حاصل کیے گئے ہیں مثلاً

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-3}{5}, \frac{2}{4}, \frac{4}{-7}, ...$ وغیرہ

یہ تمام اعداد ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔ لہٰذا ناطق اعداد کی تعریف یہ ہے:
"وہ تمام اعداد ناطق اعداد کہلاتے ہیں جنہیں $\frac{a}{b}$ کی صورت میں لکھا جاسکے جبکہ a اور b صحیح اعداد ہوں اور $b \neq 0$ ہو"
ناطق اعداد کے سیٹ کو عام طور پر Q سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
ناطق اعداد کی تعریف سے یہ واضح ہوتا ہے کہ تمام قدرتی اعداد اور صحیح اعداد، ناطق اعداد ہیں کیونکہ کسی بھی قدرتی یا صحیح عدد 'a' کو $\frac{a}{b}$ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

مثلاً:

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \cdots$$

$$-6 = \frac{-6}{1} = \frac{-12}{2} = \frac{-18}{3} = \cdots$$

اسی طرح تمام کسور بھی ناطق اعداد ہیں۔
اب ہم کسورِ اعشاریہ کے ناطق یا غیر ناطق ہونے کے متعلق پڑھتے ہیں۔
کسور اعشاریہ تین قسم کی ہوتی ہیں:

(1) مختتم کسرِ اعشاریہ

ایسی کسرِ اعشایہ جس کے کسری حصے میں ہندسوں کی تعداد محدود یا متناہی ہو مختتم کسرِ اعشاریہ کہلاتی ہے۔

مثلاً: 2.05 ، 132.0123 اور 15.1030987654312

مختتم کسور اعشاریہ ہیں۔
مندرجہ بالا کسور کو بآسانی $\frac{a}{b}$ کی صورت میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔
پس معلوم ہوا کہ "تمام مختتم کسور اعشاریہ ناطق اعداد ہوتی ہیں"

(2) متوالی کسرِ اعشاریہ

ایسی کسرِ اعشاریہ جو غیر مختتم ہو اور جس کے کسری حصے میں چند ہندسے ایک ہی ترتیب سے بار بار آئیں متوالی کسرِ اعشاریہ کہلاتی ہے۔

مثلاً:

(i) $\frac{1}{3} = 0.3333\cdots$ (3 بار آرہا ہے)

(ii) $\frac{1}{6} = 0.1666\cdots$ (6 بار آرہا ہے)

(iii) $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\cdots$

(7، 5، 8، 2، 4، 1 ایک ہی ترتیب میں بار بار آرہے ہیں)
اگلی جماعتوں میں ہم پڑھیں گے کہ ہر متوالی کسر کو کسرِ عام میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔
لہٰذا "تمام متوالی کسور اعشاریہ ناطق اعداد ہیں"

(3) غیر مختتم غیر متوالی کسور اعشاریہ

ایسی کسر اعشاریہ جس کے کسری ہندسوں کی تعداد تو غیر متناہی ہو لیکن چند ہندسوں کی تکرار کسی ایک ہی ترتیب سے نہ ہو غیر مختتم غیر متوالی کسر اعشاریہ کہلاتی ہے۔

مثلاً :

(i) 0 . 1010 01 000100001 ...

(یہاں '0' اور '1' کے ہندسوں کی تکرار کسی ایک ترتیب میں نہیں ہورہی)

(ii) 415 .12 11 22 111222 1111 2222 ...

کسی غیر مختتم غیر متوالی کسرِ اعشاریہ کو کسرِ عام میں تحویل کرنا ممکن نہیں ہے۔ لہٰذا :
"غیر مختتم غیر متوالی کسورِ اعشاریہ غیر ناطق اعداد ہیں"
اسی طرح π بھی ایک غیر ناطق عدد ہے کیونکہ

$$\pi = 3.141592653589793\ldots$$

اور ہر نامکمل مربع کا جذر بھی غیر ناطق ہوتا ہے۔ مثلاً

$$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$$

2.8 ناطق اعداد کی جمع اور تفریق

مندرجہ ذیل مثالوں کو دیکھیے :

(i) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

(ii) $\frac{3}{4} + \frac{5}{3} = \frac{9+20}{12} = \frac{29}{12}$

(iii) $\frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3-1}{7} = \frac{2}{7}$

(iv) $\frac{4}{15} - \frac{2}{5} = \frac{4-6}{15} = \frac{-2}{15}$

مندرجہ بالا مثالوں سے ظاہر ہے کہ ناطق اعداد کو کسور کی جمع اور تفریق کے قاعدے کے مطابق جمع اور تفریق کیا جاتا ہے۔ اور کسی بھی دو ناطق اعداد کا مجموعہ یا فرق بھی ناطق عدد ہی ہوتا ہے۔

2.9 ناطق اعداد کی ضرب اور تقسیم

کسی بھی دو ناطق اعداد کا حاصل ضرب ان کے شمار کنندوں اور نسب نماؤں کو علیحدہ علیحدہ ضرب کر کے معلوم کیا جاتا ہے۔ مثلاً

(i) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{5 \times 3}{6 \times 10} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

(ii) $\frac{-3}{8} \times \frac{-8}{3} = \frac{-3 \times -8}{8 \times 3} = 1$

ہم جانتے ہیں تقسیم کا عمل ضرب کا معکوس عمل ہے

لہٰذا $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{21}{20}$

مندرجہ بالا مثالوں سے ظاہر ہے کہ کسی بھی دو ناطق اعداد کا حاصل ضرب یا حاصل تقسیم بھی ناطق ہی ہوتا ہے۔

2.10 ناطق اعداد کے خواص

(1) خاصیت بندش بلحاظ جمع

دو ناطق اعداد a اور b کا مجموعہ $(a + b)$ بھی ایک ناطق عدد ہوتا ہے۔ مثلاً

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3} \in Q$$

$\frac{2}{3}$ اور $\frac{5}{3}$ ناطق اعداد ہیں ان کا مجموعہ $\frac{7}{3}$ بھی ناطق عدد ہے

اس لیے اگر $a, b \in Q$ تو $(a+b) \in Q$

(2) خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع

دو ناطق اعداد a اور b کو کسی بھی ترتیب سے جمع کیا جائے تو حاصل جمع ہمیشہ ایک ہی ناطق عدد ہوتا ہے۔

مثلاً $\frac{5}{3}+\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$

اور $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}$$

اس لیے اگر $a, b \in Q$ تو

$$a+b = b+a$$

(3) خاصیت تلازم بلحاظ جمع

اگر a, b اور c کوئی بھی تین ناطق اعداد ہوں تو

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

یعنی کسی تین ناطق اعداد کو کسی بھی ترتیب سے جمع کیا جائے ان کا مجموعہ ہمیشہ ایک ہی ناطق عدد ہوتا ہے۔

مثال:

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{5} = \frac{5}{5}+\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

اسی طرح

$$\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}+\frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

یعنی

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{5} = \frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)$$

اس لیے اگر $a, b, c \in Q$

تو $(a+b)+c = a+(b+c)$

(4) جمعی ذاتی عنصر کا وجود

ناطق اعداد کے سیٹ میں ایک رکن صفر '0' ایسا ہے جسے کسی بھی ناطق عدد a میں جمع کیا جائے تو حاصل جمع وہی ناطق عدد ہوتا ہے۔

یعنی $0+a = a+0 = a$

پس صفر '0'، جمعی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔

(5) جمعی معکوس کا وجود

ناطق اعداد کے سیٹ میں ہر ناطق عدد 'a' کے لیے ایک ایسا ناطق عدد '-a' موجود ہے، جن کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ یعنی $a + (-a) = (-a) + (a) = 0$

اس لیے a کا جمعی معکوس -a اور -a کا جمعی معکوس a ہے۔

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\frac{4}{3}$ کا جمعی معکوس $-\frac{4}{3}$ ہے اور $-\frac{4}{3}$ کا جمعی معکوس $\frac{4}{3}$ ہے۔

(6) خاصیت بندش بلحاظ ضرب

ناطق اعداد 'a' اور 'b' کا حاصل ضرب بھی ایک ناطق عدد ہوتا ہے "مثلاً"

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \in Q$$

پس اس سے معلوم ہوا کہ اگر $a, b \in Q$ تو $a \times b \in Q$

(7) خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب

دو ناطق اعداد 'a' اور 'b' کو کسی بھی ترتیب سے ضرب کیا جائے، حاصل ضرب ہمیشہ یکساں رہتا ہے۔

مثلاً $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{21}$

اور $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$

یعنی $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{21}$

اس لیے اگر $a, b \in Q$ تو

$$a \times b = b \times a$$

(8) خاصیت تلازم بلحاظ ضرب

تین ناطق اعداد a، b اور c کو کسی بھی ترتیب سے ضرب کیا جائے، جواب ہمیشہ یکساں رہتا ہے۔ یعنی

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

مثال:

$$\left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{40}$$

اور

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{40}$$

پس

$$\left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\right)$$

اس لیے اگر $a, b, c \in Q$ تو

$$(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$$

(9) ضربی ذاتی عنصر کا وجود

ناطق اعداد کے سیٹ میں ایک رُکن '1' ایسا ہے جسے کسی بھی ناطق عدد 'a' سے ضرب کیا جائے تو حاصل ضرب وہی ناطق عدد 'a' حاصل ہوتا ہے۔ عدد '1' کو ضربی ذاتی عنصر کہتے ہیں۔

یعنی $1\times a = a\times 1 = a$

مثلاً $1\times\frac{5}{7} = \frac{5}{7}\times 1 = \frac{5}{7}$

(10) ضربی معکوس کا وجود

ہر غیر صفر ناطق عدد 'a' کے لیے ایک ناطق عدد $\frac{1}{a}$ موجود ہے، جن کا حاصل ضرب '1' ہوتا ہے۔ یعنی

$$a\times\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\times a = 1$$

a اور $\frac{1}{a}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس کہلاتے ہیں۔

مثلاً $\frac{2}{5}$ کا ضربی معکوس $\frac{5}{2}$ ہے اور $\frac{5}{2}$ کا ضربی معکوس $\frac{2}{5}$ ہے۔

(11) ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع

اگر a، b اور c کوئی بھی تین ناطق اعداد ہوں تو

$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c$$

یا

$$(b+c)\times a = b\times a + c\times a$$

مثال:

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{4}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\times 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

اور

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{4}{8}$$

$$= \frac{1}{2}$$

پس $\frac{1}{2} \times (\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$

مشق 2.2

1۔ مندرجہ ذیل میں کون سے سیٹ بلحاظ جمع اور ضرب خاصیت بندش رکھتے ہیں:

(i) قدرتی اعداد کا سیٹ (ii) مکمل اعداد کا سیٹ (iii) صحیح اعداد کا سیٹ
(iv) مفرد اعداد کا سیٹ (v) طاق اعداد کا سیٹ (vi) جفت اعداد کا سیٹ
(vii) مرکب اعداد کا سیٹ (viii) ناطق اعداد کا سیٹ

2۔ مندرجہ ذیل مساواتوں میں ناطق اعداد کے جن خواص کو استعمال کیا گیا ہے، ان کے نام لکھیے:

(i) $3 + 5 = 5 + 3$ (ii) $2 + 0 = 0 + 2 = 2$

(iii) $7 \times 5 = 5 \times 7$ (iv) $(\frac{-3}{4}) + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + (\frac{-3}{4})$

(v) $4 \times \frac{1}{4} = 1$ (vi) $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1 = \frac{5}{3} \times \frac{3}{5}$

(vii) $7 \times (\frac{3}{5} + \frac{9}{10}) = 7 \times \frac{3}{5} + 7 \times \frac{9}{10}$

(viii) $(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}) + 5 = \frac{3}{7} + (\frac{4}{7} + 5)$

(ix) $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$ (x) $(3 \times 6) \times 9 = 3 \times (6 \times 9)$

(xi) $1 \times 5 = 5 = 5 \times 1$ (xii) $(-3) \times (\frac{-1}{3}) = 1$

3۔ مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو مختصر کیجیے:

(i) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3}$ (ii) $\frac{3}{7} + \frac{4}{21}$ (iii) $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}$

(iv) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{2}$ (v) $(\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}) \times \frac{1}{2}$ (vi) $(\frac{3}{8} \div \frac{9}{4}) \div \frac{18}{21}$

4۔ مندرجہ ذیل ناطق اعداد کے ضربی و جمعی معکوس لکھیے۔

(i) 0 (ii) -5 (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $-\frac{1}{3}$ (v) 15

(vi) $-\frac{5}{9}$ (vii) $\frac{20}{21}$ (viii) $\frac{9}{11}$ (ix) $-\frac{2}{5}$ (x) $-\frac{5}{11}$

تیسرا باب

اعداد کا ثنائی اور خمسی نظام

3.1 اعشاری نظام

ہمارے یہاں جو عددی نظام رائج ہے اس کو "اعشاری نظام" کہتے ہیں۔ (عشر کے معنیٰ "دس" ہیں)۔
اس نظام کی بنیادی علامات جنہیں ہندسے کہتے ہیں ان کی تعداد دس ہے جو کہ درج ذیل ہیں۔

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

نو سے بڑے اور سو سے چھوٹے قدرتی اعداد کو ظاہر کرنے والی علامتیں دو ہندسوں پر مشتمل ہوتی ہیں۔ اسی طرح ننانوے سے بڑے اور ہزار سے چھوٹے قدرتی اعداد تین ہندسوں والی علامتوں سے ظاہر کیے جاتے ہیں وغیرہ

اعشاری نظام پر غور کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ عدد کا ہر ہندسہ دس کی کسی نہ کسی قوت پر مبنی ہوتا ہے۔

مثلاً

$$23 = 20 + 3$$
$$= 2 \times 10 + 3 \times 10^0 \quad [\because 10^0 = 1]$$

اسی طرح 5456 کو مندرجہ ذیل طریقے سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$5456 = 5000 + 400 + 50 + 6$$
$$= 5 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \times 1$$
$$= 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

نوٹ: 5456 کو مطلوبہ شکل میں یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

10	5456	
10	545	6
10	54	5
	5	4

پس $5456_{10} = 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

آج کل سائنسی تحقیق و ترقی کا دور ہے جدید سائنسی تحقیق میں اعشاری نظام کے علاوہ بھی دیگر نظام

استعمال کیے جا رہے ہیں۔ مثلاً کمپیوٹر، جو کہ زندگی کے بیشتر شعبوں میں استعمال ہو رہا ہے، میں جو عددی نظام استعمال ہوتا ہے اس کی اساس 'دو' ہوتی ہے۔ ریاضی کے طالب علم کی حیثیت سے ہمارا فرض ہے کہ ہم اپنا علم صرف اعشاری نظام تک محدود نہ رکھیں۔

اس باب میں ہم "اساس دو" اور "اساس پانچ" کے عددی نظام کے بارے میں پڑھیں گے۔

مشق 3.1

مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو دس کی قوت سے ظاہر کیجیے۔

(1) 45	(2) 249	(3) 635
(4) 2319	(5) 8567	(6) 56721
(7) 72165	(8) 25729	(9) 29527
(10) 10000		

3.2 اساس دو کا نظام یا ثنائی نظام

اساس دو کا نظام جسے ثنائی نظام بھی کہتے ہیں۔ اس میں ہر عدد کو دو علامتوں '0' اور '1' کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کمپیوٹر میں اساس دو کا نظام استعمال ہوتا ہے اور کمپیوٹر برقی رو سے چلتا ہے اور برقی رو آف (off) ہوتی ہے یا آن (on)۔ لہٰذا کمپیوٹر میں '0' کو 'آف' اور '1' کو 'آن' کے مطابق لیا جاتا ہے۔

ثنائی نظام میں سب سے بڑی علامت '1' ہے۔ لہٰذا جس طرح اعشاری نظام میں سب سے بڑی علامت '9' میں '1' جمع کیا جاتا ہے تو اس کو '10' لکھتے ہیں۔ اسی طرح ثنائی نظام میں '1' میں '1' جمع کرنے سے '10' حاصل ہوتا ہے جو کہ اعشاری نظام میں دو (2) کے مترادف ہے۔

ثنائی نظام میں '10' کو دس نہیں پڑھتے بلکہ اسے 'ایک صفر' پڑھا جاتا ہے۔

مختلف عددی نظاموں میں فرق واضح رکھنے کے لیے عددی علامت کے ساتھ متعلقہ اساس لکھ دی جاتی ہے۔ مثلاً 232_{10} کا مطلب ہے کہ 232 کو اساس دس کے نظام میں لکھا گیا ہے۔ اسی طرح 101_2 کا مطلب ہے کہ 101 کو اساس دو کے نظام میں لکھا گیا ہے اور 431_5 کا مطلب ہے کہ 431 کو اساس پانچ کے نظام میں لکھا گیا ہے وغیرہ۔

نوٹ: عام طور پر اعشاری نظام میں لکھے ہوئے عدد کے ساتھ اساس نہیں لکھی جاتی۔

اب ہم اعشاری نظام کے اعداد کو ثنائی نظام کے مترادف اعداد اور ثنائی نظام کے اعداد کو اعشاری نظام کے مترادف اعداد میں تحویل کرنا سیکھتے ہیں۔

3.3 اعداد کو اعشاری نظام سے ثنائی نظام میں تحویل کرنا

ہم جانتے ہیں کہ اعشاری نظام میں ہر عدد کو 10 کی قوت سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح ہر عدد کو 2 کی قوت سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً $3_{10} = 2 + 1$

$= 2^1 + 2^0$

چونکہ ثنائی نظام میں 2 مترادف ہے '10' کے

لہٰذا $3_{10} = 10^1 + 10^0$

$= 10 + 1$ (کیونکہ $10^0 = 1$)

یا $3_{10} = 11_2$

یعنی اعشاری عدد 3 ثنائی نظام میں 11 کے مترادف ہے۔

اسی طرح $13_{10} = 8 + 4 + 1$

$= 2^3 + 2^2 + 2^0$

$= 10^3 + 10^2 + 10^0$

$= 1000 + 100 + 1$ (کیونکہ $10^0 = 1$)

یا $13_{10} = 1101_2$

مندرجہ بالا طریقے سے بڑے اعشاری اعداد کو ثنائی نظام میں تحویل کرنا کافی دقت طلب کام ہے۔ لہٰذا کسی بھی اعشاری عدد کو ثنائی عدد میں تحویل کرنے کے لیے اعشاری عدد کو 2 سے بار بار تقسیم کیا جاتا ہے۔ عمل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1۔ اعشاری عدد 143 کو ثنائی نظام میں تحویل کیجیے۔

حل:

		باقی
2	143	
2	71	1
2	35	1
2	17	1
2	8	1
2	4	0
2	2	0
2	2	0
	1	0

وضاحت: سب سے پہلے 143 لکھا۔ پھر اس کو 2 سے تقسیم کیا۔ خارج قسمت 71 نیچے کی جانب اور باقی '1' دائیں جانب لکھا۔ 71 کو دوبارہ 2 سے تقسیم کیا۔ خارج قسمت 35 اور باقی '1' حاصل ہوا۔ یہ عمل اُس وقت تک جاری رکھا جب تک خارج قسمت 1 نہ ہو گیا۔

باقی بچے ہوئے اعداد کو نیچے سے اُوپر کی جانب لکھنے سے ہمیں مطلوبہ ثنائی عدد حاصل ہوتا ہے۔

یعنی $143_{10} = 10001111_2$

یا $(143)_{10} = (10001111)_2$

مثال 2۔ اعشاری عدد 140 کو ثنائی نظام میں تحویل کیجیے۔

حل:

		باقی
2	140	
2	70	0
2	35	0
2	17	1
2	8	1
2	4	0
2	2	0
2	2	0
	1	0

پس $140_{10} = 10001100_2$

یا $(140)_{10} = (10001100)_2$

مشق 3.2

مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو ثنائی نظام میں تحویل کیجیے۔

(1) 63 (2) 72 (3) 97 (4) 127

(5) 180 (6) 200 (7) 89 (8) 158

(9) 155 (10) 555 (11) 1000 (12) 1019

3.4 اعداد کو ثنائی نظام سے اعشاری نظام میں تحویل کرنا

ثنائی نظام میں بھی اعداد کو مقامی قیمتوں کے لحاظ سے بالکل اعشاری نظام کی طرح سے ہی لکھا جاتا ہے۔ ثنائی نظام میں اساس چونکہ دو یعنی '10' ہوتی ہے۔ لہٰذا کسی بھی ثنائی عدد کو اعشاری نظام میں مندرجہ ذیل طریقے سے تحویل کرتے ہیں۔

مثال 1۔ 111_2 کو اعشاری نظام میں تحویل کیجیے۔

حل:

$$111_2 = 1\times10^2 + 1\times10^1 + 1\times10^0$$

اب اگر اس عدد کی قیمت اعشاری نظام میں معلوم کرنا ہو تو اس میں ثنائی اساس '10' یعنی (دو) کے بجائے اس کی اعشاری قیمت درج کر دیتے ہیں اور پھر عام حسابی طریقے سے حل کر لیا جاتا ہے۔

لہٰذا $111_2 = 1\times10^2 + 1\times10^1 + 1\times10^0$

کیونکہ $10_2 = 2_{10}$

اس لیے $= 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$

$= 4 + 2 + 1$

پس $111_2 = 7_{10}$

مثال 2۔ ثنائی عدد 111101 کو اعشاری نظام میں تحویل کیجیے۔

حل: ثنائی نظام کا دیا ہوا عدد چھ ہندسوں پر مشتمل ہے۔ اس میں اکائی کا ہندسہ 1 جسے ہم 1×2^0 لکھ سکتے ہیں اور پھر ترتیب وار بقایا ہندسوں کو 2^1، 2^2، 2^3، 2^4 اور 2^5 سے ضرب دے کر یوں لکھتے ہیں۔

$$111101_2 = 1\times2^5 + 1\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$$

$$= 1\times32 + 1\times16 + 1\times8 + 1\times4 + 0 + 1\times1$$

$$= 32 + 16 + 8 + 4 + 1$$

پس $111101_2 = 61_{10}$

مشق 3.3

مندرجہ ذیل ثنائی اعداد کو اعشاری نظام میں تحویل کیجیے۔

(1) 101 (2) 110 (3) 111011 (4) 1111
(5) 111111 (6) 1101101 (7) 10111 (8) 10101011
(9) 11101 (10) 1111111

3.5 ثنائی نظام میں اعداد کی جمع

ثنائی نظام میں جمع کا عمل نہایت ہی سادہ اور آسان ہے کیونکہ اس میں اعداد کے صرف تین جوڑے بنتے ہیں۔ یعنی

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 10$$

جدول کی صورت میں اس طرح لکھ سکتے ہیں:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

اگر تین دفعہ 1 جمع کرنا مقصود ہو تو نتیجہ حسب ذیل ہوگا۔

پہلے
$$1 + 1 = 10$$
بعد میں
$$10 + 1 = 1 + 1 + 1$$
یعنی
$$1 + 1 + 1 = 11$$

مثال 1۔ دو اعداد 111_2 اور 101_2 کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

حل: سب سے پہلے دیے گئے اعداد کو مقامی قیمتوں کے اعتبار سے ایک دوسرے کے نیچے لکھیے۔

$$\begin{array}{r} 111_2 \\ +\ \underline{101_2} \end{array}$$

پھر دائیں جانب سے شروع کرتے ہوئے ایک اور ایک کو جمع کیجیے۔ مجموعہ 2 حاصل ہوتا ہے، جو کہ ثنائی نظام میں 10 کے مترادف ہے۔ جواب میں صفر لکھیے اور 1 کو حاصل کے طور پر 1 اور 0 میں جمع کرنے سے 10 حاصل ہوتا ہے۔ جواب میں صفر لکھیے اور حاصل کو آخری ہندسوں یعنی '1' اور '1' میں

جمع کرنے سے 3 حاصل ہوتا ہے جو کہ ثنائی نظام میں 11 کے مترادف ہے۔ لہٰذا

$$\begin{array}{r} 111_2 \\ +\ 101_2 \\ \hline 1100_2 \end{array}$$

یا $111_2 + 101_2 = 1100_2$

مثال 2۔ 1010_2 اور 1111_2 کو جمع کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 1010_2 \\ +\ 1111_2 \\ \hline 11001_2 \end{array}$$

یا $1010_2 + 1111_2 = 11001_2$

مثال 3۔ 1100_2 ، 1111_2 اور 1001_2 کو جمع کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 1100_2 \\ 1111_2 \\ +\ 1001_2 \\ \hline 100100_2 \end{array}$$

یا $1100_2 + 1111_2 + 1001_2 = 100100_2$

3.6 ثنائی نظام میں اعداد کی تفریق

ثنائی نظام میں تفریق کا عمل بھی جمع کی طرح ہے۔

مثال 1۔ 101_2 میں سے 10_2 تفریق کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ -\ 10_2 \\ \hline 11_2 \end{array}$$

وضاحت: سب سے پہلے '1' میں سے '0' کو تفریق کیا گیا تو '1' حاصل ہوتا ہے۔ اس کے بعد اوپر '0' ہے اور نیچے '1'۔ لہٰذا '1' حاصل لینے سے ثنائی عدد '10' حاصل ہوتا ہے جو کہ '2' کے مترادف ہے۔ اب 2 میں سے 1 تفریق کرنے سے 1 حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2۔ 1011_2 میں سے 101_2 تفریق کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 1011_2 \\ -\ 101_2 \\ \hline 110_2 \\ \hline \end{array}$$

$1011_2 - 101_2 = 110_2$ یا

مشق 3.4

1۔ مندرجہ ذیل ثنائی اعداد کو جمع کیجیے۔

(1) 110 + 11
(2) 1010 + 101
(3) 1110 + 111
(4) 11011 + 11001
(5) 10101 + 110
(6) 1111 + 111
(7) 1101 + 110 + 1001
(8) 1101 + 1001 + 11
(9) 11011 + 11010 + 110
(10) 11111 + 1010 + 1010 + 111
(11) 1010 + 1111 + 1011
(12) 11111 + 11101 + 11111

2۔ مندرجہ ذیل ثنائی اعداد کو تفریق کیجیے:

(1) 1101−11
(2) 1111−101
(3) 1110−110
(4) 11111−1010
(5) 110111−1101
(6) 10001−11
(7) 10011−101
(8) 1110−101
(9) 1001−10
(10) 1111−1000
(11) 11011−1010
(12) 111111−10100

3.7 ثنائی نظام میں اعداد کی ضرب

ثنائی نظام میں ضرب کا عمل، جمع کے عمل سے زیادہ آسان ہے۔ اس میں صرف مقاموں کا خیال رکھنا پڑتا ہے۔ اس نظام میں اعداد کو ضرب دینے سے صرف تین جوڑے بنتے ہیں جو مندرجہ ذیل ہیں۔

$0 \times 0 = 0$

$0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$

اور $1 \times 1 = 1$

جدول کی صورت میں اس کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

×	0	1
0	0	0
1	0	1

مثلاً اگر 1101_2 اور 101_2 کو ضرب دینا ہو تو مجموعی عمل حسب ذیل ہوتا ہے۔

```
   1101
 ×  101
 ------
   1101     ←  1 سے ضرب کرنے سے
  0000×     ←  0 سے ضرب کرنے سے
 1101××     ←  1 سے ضرب کرنے سے
 ------
1000001     تینوں حاصل ضرب جمع کرنے سے
```

یا $1101_2 \times 101_2 = 1000001_2$

مشق 3.5

حل کیجیے:

(1) $101_2 \times 11_2$ (2) $110_2 \times 101_2$ (3) $1111_2 \times 100_2$

(4) $110_2 \times 1101_2$ (5) $101_2 \times 111_2$ (6) $10101_2 \times 1010_2$

(7) $11110_2 \times 101_2$ (8) $1001_2 \times 101_2$ (9) $10100_2 \times 11_2$

(10) $110111_2 \times 111_2$

3.8 خمسی نظام یا اساس پانچ کا نظام

اس نظام میں اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے پانچ ہندسے یعنی 0, 1, 2, 3, 4 استعمال کیے جاتے ہیں۔ اس لیے اسے اساس پانچ کا نظام کہتے ہیں۔ اس نظام میں بھی اعداد کو اسی طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔ جس طرح اعشاری نظام میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ کیونکہ خمسی نظام میں سب سے بڑا ہندسہ 4 ہے اور جس طرح اعشاری نظام کی سب سے بڑی علامت 9 میں 1 جمع کرنے سے '10' حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح خمسی نظام میں بھی 4 میں 1 جمع کرنے سے '10' حاصل ہوتا ہے جو کہ اعشاری نظام میں 5 کے مترادف ہے۔

اب ہم اعشاری نظام کے اعداد کو خمسی نظام کے مترادف اعداد اور خمسی نظام کے اعداد کو اعشاری نظام کے مترادف اعداد میں تحویل کرنا سیکھتے ہیں۔

3.9 اعداد کو اعشاری نظام سے خمسی نظام میں تحویل کرنا

خمسی نظام میں بھی اعشاری نظام کی طرح عدد کو "پانچ" کی قوت کے حاصل ضربوں کے مجموعے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مثلاً

$$523_{10} = 500 + 20 + 3$$

$$= 4\times5^3 + 4\times5^1 + 3\times5^0$$

کیونکہ خمسی نظام میں

$$10_5 = 5_{10}$$

لہٰذا

$$523_{10} = 4\times10^3 + 4\times10^1 + 3\times10^0$$

$$= 4000 + 40 + 3$$

$$= 4043_5$$

بڑے اعداد کو اس طریقے سے خمسی نظام میں تحویل کرنا ایک دقت طلب کام ہے۔ اس لیے آسانی کے لیے اعداد کو اعشاری نظام سے خمسی نظام میں تبدیل کرنے کے لیے وہی طریقہ استعمال کیا جاتا ہے جو ثنائی نظام میں تبدیل کرنے کے لیے اختیار کیا جاتا رہا ہے۔ اس میں چونکہ اساس "پانچ" ہے لہٰذا عمل یوں ہوتا ہے

		باقی
5	523	
5	104	3
5	20	4
	4	0

پس $523_{10} = 4043_5$

مثال: 567 کو خمسی نظام میں تحویل کیجیے۔

حل:

		باقی
5	567	
5	113	2
5	22	3
	4	2

پس $567_{10} = 4232_5$

3.10 اعداد کو خمسی نظام سے اعشاری نظام میں تحویل کرنا

اعداد کو خمسی نظام سے اعشاری نظام میں بالکل اسی طرح سے تبدیل کیا جاتا ہے۔ جس طرح ثنائی نظام سے تبدیل کرتے ہیں۔ خمسی نظام اساس "پانچ" یعنی '10' ہوتی ہے۔ لہٰذا ہر خمسی عدد کو اعشاری نظام میں مندرجہ ذیل طریقے سے تحویل کرتے ہیں۔

مثال 1۔ 4321_5 کو اعشاری نظام میں تحویل کیجیے۔

حل: $4321_5 = 4\times10^3 + 3\times10^2 + 2\times10^1 + 1\times10^0$

یاد رہے کہ دیے ہوئے عدد کا دائیں طرف سے پہلا ہندسہ اساس (یعنی 10) کی صفرویں قوت سے ضرب ہوتا ہے۔ دوسرا ہندسہ اساس کی پہلی قوت سے، تیسرا ہندسہ اساس کی دوسری قوت سے، چوتھا ہندسہ اساس کی تیسری قوت سے ضرب ہوتا ہے وغیرہ

اب اگر اس عدد کو اعشاری نظام میں لکھنا چاہتے ہیں تو اس میں خمسی اساس 10 کے بجائے اس کی اعشاری قیمت یعنی

$$10_5 = 5$$

درج کر دیتے ہیں اور پھر عام حسابی طریقے سے حل کر لیتے ہیں۔ لہٰذا

$$4321_5 = 4\times5^3 + 3\times5^2 + 2\times5^1 + 1\times5^0$$
$$= 4\times125 + 3\times25 + 2\times5 + 1\times1$$
$$= 500 + 75 + 10 + 1$$
$$= 586_{10}$$

مثال 2۔ 124_5 کو اعشاری نظام میں تحویل کیجیے۔

حل:
$$124_5 = 1\times5^2 + 2\times5^1 + 4\times5^0$$
$$= 1\times25 + 2\times5 + 4\times1$$
$$= 25 + 10 + 4$$
$$= 39_{10}$$

مثال 3- 2324_5 کو اعشاری نظام میں تحویل کیجیے۔

حل:
$$2324_5 = 2\times5^3 + 3\times5^2 + 2\times5^1 + 4\times5^0$$
$$= 2\times125 + 3\times25 + 2\times5 + 4\times1$$
$$= 250 + 75 + 10 + 4$$

پس $2324_5 = 339_{10}$

مشق 3.6

1۔ مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو خمسی نظام میں تحویل کیجیے۔

(i) 43 (ii) 52 (iii) 97 (iv) 256 (v) 190
(vi) 570 (vii) 153 (viii) 1234 (ix) 3344 (x) 7543

2۔ مندرجہ ذیل خمسی اعداد کو اعشاری نظام میں تحویل کیجیے۔

(i) 42 (ii) 123 (iii) 234 (iv) 444 (v) 1000
(vi) 2024 (vii) 4320 (viii) 32113 (ix) 32140 (x) 4433

3.11 خمسی نظام میں جمع اور تفریق

خمسی نظام میں صرف پانچ ہندسے 0، 1 ,2 ,3 ,4 استعمال ہوتے ہیں ذیل میں خمسی اعداد کی جمع و تفریق کے عمل کی وضاحت کے لیے مثالیں دی جا رہی ہیں۔

مثال 1۔ $4_5 + 1_5$ کو حل کیجیے۔

حل: چار اور ایک کا مجموعہ پانچ ہوتا ہے لیکن خمسی نظام میں پانچ کو '10' سے ظاہر کرتے ہیں۔

یعنی $4_5 + 1_5 = 10_5$

مثال 2۔ $3_5 + 4_5$ کو حل کیجیے۔

حل: چونکہ تین اور چار کا مجموعہ سات ہوتا ہے۔ لیکن خمسی نظام میں عدد سات کو '12' سے ظاہر کرتے ہیں۔ یعنی $3_5 + 4_5 = 12_5$

مثال 3۔ 123_5 اور 312_5 کو جمع کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 123_5 \\ +\ 312_5 \\ \hline 440_5 \\ \hline \end{array}$$

یا $123_5 + 312_5 = 440_5$

مثال 4۔ 4141_5 اور 3421_5 کا مجموعہ معلوم کیجیے۔
حل:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 4141_5 \\ +\ 3421_5 \\ \hline 13112_5 \\ \hline \end{array}$$

یا $4141_5 + 3421_5 = 13112_5$

طلبہ کی سہولت کے لیے خمسی نظام میں جمع کی جدول دی جارہی ہے۔ اس کو استعمال کرکے اس نظام میں اعداد کو بآسانی جمع کیا جاسکتا ہے۔

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

خمسی نظام میں تفریق کا عمل ثنائی نظام میں تفریق کی طرح ہے۔
مثال 1۔ 424_5 میں سے 231_5 تفریق کیجیے۔
حل:

$$\begin{array}{r} 424_5 \\ -\ 231_5 \\ \hline 143_5 \\ \hline \end{array}$$

یا $424_5 - 231_5 = 143_5$

وضاحت: یہاں پر ہم نے پہلے '4' میں سے '1' تفریق کیا، حاصل 3 ہوا۔ پھر عدد '2' میں سے '3' تفریق نہیں ہوسکتا اس لیے برابر کے عدد '4' سے '1' لیا۔ یہاں پر خمسی نظام کا ایک '5' کے برابر ہے اس لیے مجموعی طور پر '7' ہوتا ہے۔ اب اس میں سے '3' تفریق کرنے سے '4' حاصل ہوا۔ آخر میں 3 میں سے 2 تفریق کرنے سے 1 حاصل ہوا۔

مثال 2۔ 13012_5 میں سے 4141_5 تفریق کیجیے۔
حل:

$$\begin{array}{r} 13012_5 \\ -4141_5 \\ \hline 3321_5 \\ \hline \end{array}$$

یا $13012_5 - 4141_5 = 3321_5$

مشق 3.7

1۔ مندرجہ ذیل خمسی اعداد کو جمع کیجیے۔

(i) $431_5 + 134_5$ (ii) $3344_5 + 1304_5$

(iii) $4333_5 + 343_5$ (iv) $43_5 + 14_5$

(v) $34321_5 + 24113_5$ (vi) $43_5 + 143_5 + 133_5$

(vii) $1432_5 + 2341_5 + 123_5$ (viii) $222_5 + 3433_5 + 142_5$

(ix) $1234_5 + 3444_5 + 444_5$ (x) $12340_5 + 12340_5$

2۔ مندرجہ ذیل خمسی اعداد کو تفریق کیجیے اور حاصل شدہ فرق کو تفریق کیے گئے عدد میں جمع کر کے اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) $342_5 - 12_5$ (ii) $202_5 - 14_5$ (iii) $3214_5 - 1403_5$

(iv) $4321_5 - 1234_5$ (v) $4231_5 - 2304_5$

3۔ مندرجہ ذیل خمسی اعداد کو حل کیجیے۔

(i) $143_5 + 444_5 - 341_5$ (ii) $1234_5 + 4321_5 - 444_5$

(iii) $44444_5 - 321_5 - 444_5$ (iv) $23222_5 - 2111_5 - 232_5$

(v) $1234_5 + 4321_5 - 3221_5$

3.12 خمسی نظام میں اعداد کی ضرب

ہمیں معلوم ہے کہ ضرب کا عمل درحقیقت کسی عدد کو بار بار جمع کرنے کے مترادف ہے۔ چنانچہ خمسی نظام میں بھی ضرب کا عمل جمع کے عمل ہی سے اخذ کیا گیا ہے۔ طلبہ کی آسانی کے لیے خمسی نظام میں اعداد کے ضرب کا جدول دیا جا رہا ہے۔

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

مثال 1۔ 231_5 اور 34_5 کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 231_5 \\ \times\ 34_5 \\ \hline 2024 \\ 1243\times \\ \hline 20004_5 \end{array}$$

4 سے ضرب کرنے سے

3 سے ضرب کرنے سے

تینوں حاصل ضرب کو جمع کرنے سے

رف عمل

$3 \times 4 = 12$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 12 \\ \hline & 2 - 2 \end{array}$$

$12_{10} = 22_5$

پس $231_5 \times 34_5 = 20004_5$

مثال 2۔ 4321_5 اور 123_5 سے ضرب کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 4321_5 \\ \times\ 123_5 \\ \hline 24013 \\ 14142\times \\ 4321\times\times \\ \hline 1203033_5 \\ \hline \end{array}$$

3 سے ضرب کرنے سے ←

2 سے ضرب کرنے سے ←

1 سے ضرب کرنے سے ←

تینوں حاصل ضرب کو جمع کرنے سے

پس $4321_5 \times 123_5 = 1203033_5$

مشق 3.8

مندرجہ ذیل خمسی اعداد کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(1) $423_5 \times 321_5$
(2) $14_5 \times 13_5$
(3) $1134_5 \times 223_5$
(4) $3221_5 \times 443_5$
(5) $233_5 \times 343_5$
(6) $403_5 \times 243_5$
(7) $1004_5 \times 113_5$
(8) $4004_5 \times 303_5$
(9) $3210_5 \times 114_5$
(10) $3344_5 \times 1230_5$

چوتھا باب

جذرالمربع

تعارف

ساتویں جماعت میں ہم مکمل مربع اعداد کا جذر المربع معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ یادداشت کے لیے چند مربع اعداد کے جذر یہاں دیے جا رہے ہیں۔

$\sqrt{1} = \sqrt{1\times1} = 1$, $\sqrt{4} = \sqrt{2\times2} = 2$

$\sqrt{9} = \sqrt{3\times3} = 3$, $\sqrt{16} = \sqrt{4\times4} = 4$

$\sqrt{25} = \sqrt{5\times5} = 5$, $\sqrt{36} = \sqrt{6\times6} = 6$

$\sqrt{49} = \sqrt{7\times7} = 7$, $\sqrt{64} = \sqrt{8\times8} = 8$

$\sqrt{81} = \sqrt{9\times9} = 9$, $\sqrt{100} = \sqrt{10\times10} = 10$

$\sqrt{400} = \sqrt{20\times20} = 20$, $\sqrt{900} = \sqrt{30\times30} = 30$

$\sqrt{8100} = \sqrt{90\times90} = 90$, $\sqrt{10000} = \sqrt{100\times100} = 100$

$\sqrt{250000} = \sqrt{500\times500} = 500$

مذکورہ بالا جذر المربع پر غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک ہندسی اور دو ہندسی اعداد کا جذر ایک ہندسی عدد ہے۔ تین اور چار ہندسی اعداد کا جذر دو ہندسی عدد ہے۔ پانچ ہندسی اور چھ ہندسی اعداد کا جذر تین ہندسی عدد ہے۔ یاد رہے کہ اگر مجذور (Radicand) میں ہندسوں کی تعداد طاق ہو تو جذر میں ہندسوں کی تعداد مجذور کے ہندسوں کی تعداد میں ایک جمع کر کے مجموعہ کا نصف لینے سے حاصل ہوتی ہے۔ مثلاً $\sqrt{10000}$ میں ہندسوں کی تعداد پانچ ہے لہٰذا اس کے جذر میں ہندسوں کی تعداد ہوگی؛

$$\frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

نوٹ: '$\sqrt{\quad}$' جذر کی علامت ہے اور اس کے اندر لکھا ہوا عدد مجذور کہلاتا ہے۔

4.1 جذرالمربع بذریعہ تقسیم

بڑے اعداد اور نامکمل اعداد کا جذر معلوم کرنے کے لیے تقسیم کا طریقہ استعمال کیا جاتا ہے۔ طریقۂ کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1 ۔ 169 کا جذر معلوم کیجیے۔

حل :

حاصل تقسیم ← 13

1	$\hat{1}\,\overline{69}$
+1	1
23	69
+3	69
26	0

پس $\sqrt{169} = 13$

وضاحت :

(i) سب سے پہلے دیے ہوئے عدد 169 کے دائیں سے بائیں جانب ہندسوں کے جوڑے بنائیے اور جو جوڑا حاصل ہوا، اس کے اوپر ایک چھوٹا سا خط (‾) لگایا۔ اور باقی بچنے والے ہندسے پر علامت (^) لگائی۔

(ii) ہندسہ '1' کے لیے ایسا عدد معلوم کیا جس کا مربع '1' ہو۔ وہ عدد '1' ہے۔

(iii) عدد 1 کو اپنے آپ سے ضرب دینے پر حاصل ضرب 1 ہی حاصل ہوا۔ اِسے 1 میں سے تفریق کیا۔ باقی صفر بچا۔

(iv) اس کے بعد جوڑے 69 کو لکھا اور مقسوم علیہ 1 میں 1 جمع کیا تو 2 حاصل ہوا۔

(v) 2 کے دائیں جانب ایسا ہندسہ لکھا جس سے اس طرح بننے والے عدد سے ضرب کرنے سے 69 آئے۔ ظاہر ہے کہ ایسا عدد 3 ہے، اس طرح نیا مقسوم علیہ 23 حاصل ہوا، اُسے 3 سے ضرب دینے سے 69 حاصل ہوا۔ حاصل ضرب 69 کو تفریق کرنے پر باقی صفر بچا۔ پس مطلوبہ جذر 13 ہوا۔

مثال 2 ۔ 546121 کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

حل :

حاصل تقسیم ← 739

7	$\overline{54}\,\overline{61}\,\overline{21}$
+ 7	49
143	561
+ 3	429
1469	13221
+ 9	13221
1478	0

پس $\sqrt{546121} = 739$

یہاں ایک بات واضح کی جاتی ہے کہ اس مثال میں ہندسوں کے جوڑے میں سے جوڑے 54 کا مکمل مربع حاصل نہیں ہوتا ہے۔ اس لیے ایسا عدد لیا ہے کہ جس کا مربع 54 سے کم لیکن قریب ترین ہو۔ جو کہ 7 ہے۔

مشق 4.1

مندرجہ ذیل اعداد کا جذر تقسیم کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

(1) 121	(2) 196	(3) 324	(4) 625
(5) 6400	(6) 1024	(7) 36864	(8) 817216
(9) 14161	(10) 9409	(11) 12243001	(12) 996004

4.2 کسور اعشاریہ اور کسور عام کا جذر

مکمل مربع اعداد کے جذر کی طرح کسور اعشاریہ اور کسور عام کا جذر بھی تقسیم کے طریقے سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ذیل کی مثالوں میں اس کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال 1۔ 1224.3001 کا جذر نکالیے۔

حل: یہاں ہم جوڑے بنانے کے لیے نقطہ اعشاریہ سے ابتدا کر کے اعشاریہ کے دونوں جانب جوڑے بناتے ہیں۔ دی ہوئی کسر اعشاریہ کے صحیح عدد والے حصے کے جوڑے (یعنی اس حصے والے اعداد کے جو نقطہ اعشاریہ کے بائیں جانب ہوں) بناتے وقت پہلے والے طریقے کے مطابق دائیں جانب سے بائیں جانب جوڑے بنائے جاتے ہیں۔ جب کہ اس کے کسری حصے (یعنی اعشاریہ کے دائیں جانب والے) کے جوڑے بائیں جانب سے دائیں جانب بنائے جاتے ہیں۔

	34.99
3	$\overline{12}\ \overline{24}\ .\overline{30}\ \overline{01}$
+3	9
64	324
+4	256
689	6830
+9	6201
6989	62901
+9	62901
6998	0

پس $\sqrt{1224.3001} = 34.99$

نوٹ: خارج قسمت میں نقطۂ اعشاریہ اتنے ہی ہندسوں کے بعد لگایا جاتا ہے۔ جتنے جوڑوں کے بعد مقسوم میں ہوتا ہے۔

مثال 2۔ 0.0000625 کا جذر معلوم کیجیے۔

حل: اگر نقطۂ اعشاریہ کے بعد بہت سے صفر ہوں لیکن اُس عدد میں مکمل عدد (صحیح عددی حصہ) نہ ہو تو اس عدد میں جتنے صفروں کے جوڑے ہوں اُسی قدر صفر جذر میں (یعنی خارج قسمت کے خانے میں فی جوڑا ایک صفر کے حساب سے) نقطۂ اعشاریہ کے بعد لگادیں۔ اور صفروں کے جوڑوں کے علاوہ باقی عدد کا جذر پہلے دیے گئے طریقے سے معلوم کر لیتے ہیں۔

$0.\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{06}\,\overline{25}$ میں نقطۂ اعشاریہ کے فوراً بعد صفروں کے دو جوڑے ہیں اس لیے فی جوڑا ایک صفر کے حساب سے ہم 0.00 یعنی کل دو صفر لگا دیتے ہیں۔ اور باقی عدد 0625 کے جذر کے شروع میں شامل کر دیتے ہیں۔

	25
2	$\overline{06}\,\overline{25}$
+2	4
45	2 25
+5	2 25
50	0

0625 کا جذر 25 ہے۔ اس لیے ہم اس جذر کے شروع میں دو صفر 0.00 شامل کر کے جواب 0.0025 حاصل کر لیتے ہیں۔

پس $\sqrt{0.0000625} = 0.0025$

مثال 3۔ $39\frac{1}{16}$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل: اس کا جذر دو مختلف طریقوں سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

پہلا طریقہ:

$$39\frac{1}{16} = \frac{625}{16}$$

اس طریقے میں شمار کنندہ اور نسب نما کا علیحدہ علیحدہ جذر نکال لیتے ہیں۔ پھر تقسیم کے عمل سے جواب معلوم کر لیتے ہیں۔

	4
4	16
+ 4	16
8	0

	25
2	$\overline{6}\,\overline{25}$
+2	4
45	225
+ 5	225
50	0

تو $\sqrt{625} = 25$

اور $\sqrt{16} = 4$

پس $\sqrt{39\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4} = 6.25$

دوسرا طریقہ:

$\frac{1}{16}$ کو کسر اعشاریہ میں تبدیل کیا۔

یعنی $\frac{1}{16} = 0.0625$

اسی طرح $39\frac{1}{16} = 39.0625$

	6.25
	$\overline{39}.\overline{06}\,\overline{25}$
6	
+6	36
122	306
+2	244
1245	6225
+ 5	6225
1250	0

پس $\sqrt{39.0625} = 6.25$

مشق 4.2

1- مندرجہ ذیل کا جذر نکالیے۔

(i) 1.21 (ii) 4.41 (iii) 10.24

(iv) 136.89 (v) 0.000576 (vi) 0.0000484

(vii) 0.000529 (viii) 131.1025 (ix) 249.64

(x) 0.4096

2۔ مندرجہ ذیل کسورِ عام کو کسورِ اعشاریہ میں تبدیل کرکے جذر معلوم کیجیے۔ اس کے علاوہ شمار کنندوں اور نسب نماؤں کے علیحدہ علیحدہ جذر نکال کر اپنے جوابات کی تصدیق کیجیے۔

(i) $2\frac{1}{4}$ (ii) $1\frac{24}{25}$ (iii) $5\frac{41}{64}$ (iv) $7\frac{189}{225}$ (v) $\frac{9}{256}$

(vi) $1\frac{69}{100}$ (vii) $5\frac{19}{25}$ (viii) $\frac{196}{1225}$ (ix) $1\frac{1089}{1936}$ (x) $\frac{25}{144}$

4.3 ایسے اعداد کا جذر جو مکمل مربع نہ ہوں

ابھی تک ہم نے جن اعداد کا جذر نکالا ہے وہ مکمل مربع تھے۔ جن کے آخر میں کچھ باقی نہیں بچتا تھا۔ ایسے اعداد کا جذر اجزائے ضربی سے بھی نکالا جا سکتا ہے۔ لیکن تقسیم کے طریقہ کا ایک فائدہ یہ بھی ہے کہ ہم ایسے اعداد کا جذر بھی معلوم کر سکتے ہیں جو مکمل مربع نہ ہوں۔ ایک مکمل مربع عدد کا جذر "ناطق عدد" کہلاتا ہے۔ جبکہ غیر مربع عدد کا جذر "غیر ناطق عدد" کہلاتا ہے۔ ایسی صورت میں ہم جواب کی قیمت کا اندازہ اعشاریہ کے مخصوص درجوں سے لگا لیتے ہیں۔ اس کی وضاحت ذیل کی مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1۔ 125 کا جذر چار درجہ اعشاریہ تک معلوم کیجیے۔

حل: یہاں جذر اعشاریہ کے چار درجوں تک مطلوب ہے اس لیے ہم چار صفر کے جوڑے نقطہ اعشاریہ کے بعد بڑھا دیتے ہیں۔ اور تقسیم کے طریقے سے جذر نکالتے ہیں۔

	11.1803
1	125.00000000
+ 1	1
21	25
+ 1	21
221	400
+ 1	221
2228	17900
+8	17824
223603	760000
+ 3	670809
223606	89191 باقی

پس (تقریباً) $\sqrt{125} = 11.1803$

مثال 2۔ 1176.532 کا جذر معلوم کیجیے۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ اعشاریہ کے دائیں جانب کے ہندسوں کے جوڑے بائیں سے شروع ہو کر دائیں طرف کو بنائے جاتے ہیں۔ اگر جوڑے بننے کے بعد کوئی ہندسہ تنہا بچ جائے تو ایک صفر بڑھا کر آخری جوڑا مکمل کر لیتے ہیں۔ اس لیے 1176.532 کے جوڑے $\overline{11}\,\overline{76}.\overline{53}\,\overline{20}$ ہوں گے۔

	34.30
3	$\overline{11}\,\overline{76}.\overline{53}\,\overline{20}$
+3	9
64	276
+4	256
683	2053
+3	2049
6860	420

یہاں پر آخری عدد 420 کو 686 سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے اس لیے جذر میں (خارج قسمت والے خانے میں) '3' کے بعد صفر بڑھا دیا گیا ہے۔ اسی لحاظ سے تقسیم کنندہ یعنی 686 کے آخر میں بھی (صفر) بڑھا دیا گیا ہے۔

پس $\sqrt{1176.532} = 34.30 = 34.3$

کیونکہ 0.30 اور 0.3 ایک ہی قیمت کو ظاہر کرتے ہیں۔

مشق 4.3

1- مندرجہ ذیل کا جذر تین درجہ اعشاریہ تک نکالیے۔

(i) 2 (ii) 7 (iii) 8 (iv) 0.8

(v) 41431 (vi) 0.17823 (vii) 1.3 (viii) 35.24

(ix) 222 (x) 8.4

2 - مندرجہ ذیل اعداد کا جذر چار درجے اعشاریہ تک نکالیے۔

(i) 3 (ii) 5 (iii) 371.657

(iv) 17653.00015 (v) 531.632 (vi) 234.12

(vii) 7.3 (viii) 44.5 (ix) 453.1234

(x) 3457.0054

4.4 جذر میں پہلا ہندسہ زبانی طور پر معلوم کرنا

اس طریقے کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1۔ 0.04 کے جذر کا پہلا ہندسہ زبانی طور پر معلوم کیجیے۔

حل: $\sqrt{0.04} = 0.2$

کیونکہ اعشاریہ کے بعد ہندسوں کا پہلا جوڑا $\overline{04}$ ہے جس کا جذر 2 ہے۔

مثال 2۔ $\sqrt{0.4}$ کے جذر کا پہلا ہندسہ زبانی طور پر لکھیے۔

حل: $\sqrt{0.4} = 0.6$

کیونکہ اعشاریہ کے بعد پہلا جوڑا $\overline{40}$ ہے اس لیے جذر کا پہلا ہندسہ 6 ہے۔

مشق 4.4

مندرجہ ذیل اعداد کے جذر کا پہلا ہندسہ زبانی معلوم کیجیے۔

(1) 0.1 (2) 0.01 (3) 0.4 (4) 0.04

(5) 0.9 (6) 0.09 (7) 0.2 (8) 0.02

(9) 0.3 (10) 0.03 (11) 0.5 (12) 0.05

(13) $\frac{2}{5}$ (14) $\frac{3}{4}$ (15) $\frac{1}{3}$ (16) $\frac{1}{2}$

4.5 جذر پر عبارتی سوالات

مثال 1۔ آٹھویں جماعت کے طلباء نے 10 پیسے کے اُسی قدر سکے جمع کیے جس قدر اُس جماعت میں طلباء تھے اگر کُل رقم 90 روپے جمع ہوتی تو بتائیے کہ اس جماعت میں کتنے طلباء تھے اور ہر ایک طالب علم نے کتنا چندہ دیا؟

حل: کیونکہ 1 روپے میں دس دس پیسے کے کل 10 سکے ہوتے ہیں

لہٰذا 90 روپے میں دس دس پیسے کے کل سکے ہوں گے سکے $900 = 10 \times 90$

پس $\sqrt{900} = 30$

اس لیے کلاس میں 30 طلباء تھے اور ہر طالب علم نے 30 دس دس پیسے والے سکے دیے۔

روپے 3 = پیسے $300 = 30 \times 10 = 30$ دس دس پیسے والے سکے

پس طلباء کی تعداد 30 تھی

اور ہر طالب علم نے 3 روپے چندہ دیا

مثال 2۔

(i) وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جس سے ضرب کرنے سے 242 مکمل مربع بن جائے۔

(ii) وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جس سے تقسیم کرنے سے 242 مکمل مربع بن جائے۔

حل:

2	242
11	121
11	11
	1

یعنی $242 = 2 \times 11 \times 11$

(i) 242 کے اجزائے ضربی میں صرف 2 ہی ایسا عدد ہے کہ جس کا جوڑا موجود نہیں ہے۔ لہٰذا 242 کو اگر 2 سے ضرب کردیں تو یہ مکمل مربع بن جائے گا۔

(ii) 242 کے اجزائے ضربی کے جوڑوں میں 2 کا جوڑا موجود نہیں ہے۔ لہٰذا اگر 242 کو 2 سے تقسیم کردیں تو یہ مکمل مربع بن جائے گا۔

مثال 3۔

9999 میں سے کون سا چھوٹے سے چھوٹا عدد گھٹایا جائے کہ ایک مکمل مربع عدد حاصل ہو۔

حل:

	99
9	$\overline{99}\,\overline{99}$
+9	81
189	1899
+9	1701
	198

عدد کے ایک مکمل مربع ہونے کی صورت میں باقی صفر بچنا چاہیے اس لیے 198 کو 9999 میں سے گھٹادیں تو باقی ایک مکمل مربع عدد رہ جائے گا۔

مثال 4۔

چار ہندسوں کا بڑے سے بڑا عدد معلوم کریں جو ایک مربع ہو۔

حل:

چار ہندسوں کا بڑے سے بڑا عدد 9999 ہے۔

اوپر کی مثال سے معلوم ہوا کہ 9999 مکمل مربع نہیں ہے لیکن اگر اس میں سے 198 کم کردیا جائے تو یہ مکمل مربع بن جائے گا۔

پس چار ہندسوں کا بڑے سے بڑا مکمل مربع عدد ہوگا:

$$9999 - 198 = 9801$$

مثال 5۔

1000 میں کون سا چھوٹے سے چھوٹا عدد جمع کیا جائے کہ ایک مکمل مربع عدد حاصل ہو۔

حل:

	32
3	$\overline{10}\,\overline{00}$
+3	9
62	100
2	−124
	−24

وضاحت: آخری مرحلے میں '61' کو 1 سے ضرب کیا جائے تو وہ 100 سے کم ہوتا ہے لیکن '62' کو '2' سے ضرب کرنے پر '124' ہوجاتا ہے یعنی '24' بڑھ جاتا ہے۔ اگر 1000 میں 24 جمع کردیا جائے تو آخر میں کچھ نہیں بچے گا اور یہ مکمل مربع بن جائے گا۔

پس 24 جمع کیا جائے (جواب)

قاعدہ: اس قسم کے سوالوں کے آخری مرحلے میں خارج قسمت میں ہمیشہ ایک '1' جمع کر کے عمل کو مکمل کریں۔

مثال 6۔

چار ہندسوں کا چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جو ایک مکمل مربع ہو۔

اشارہ: چار ہندسوں کا چھوٹے سے چھوٹا عدد 1000 ہے۔ اگر یہ مکمل مربع ہے تو یہی مطلوبہ عدد ہوگا۔ اگر مکمل مربع عدد نہیں ہے تو پھر وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جو اس میں جمع کردیا جائے (جیسا کہ مثال 5 میں ہے) تاکہ مکمل مربع عدد حاصل ہو۔

مشق 4.5

(1) آٹھویں جماعت کے ایک گروپ نے 1681 روپیہ تفریحی سفر میں خرچ کیے۔ اگر ہر طالب علم نے اتنے ہی روپے خرچ کیے ہوں جتنی کہ اُس گروپ میں طلباء کی تعداد تھی تو اس گروپ میں طلباء کی تعداد معلوم کیجیے۔

(2) کسی کلب کے ممبران نے ایک تقریب کے لیے اتنا ہی روپیہ فی کس چندہ دیا جتنی کہ اُن ممبران کی تعداد تھی۔ اگر کل چندے کی رقم 1024 روپیہ ہو تو کلب کے ممبروں کی تعداد اور رقم چندہ فی کس معلوم کیجیے۔

(3) وہ کون سا عدد ہے جس کو اگر اُسی عدد سے ضرب دیں تو 3794.56 حاصل ہو۔

(4) احمد نے 5776 پودے اپنے باغ میں اس طرح سے لگائے کہ ہر قطار میں پودوں کی اتنی ہی تعداد تھی جتنی کہ باغ میں قطاریں تھیں۔ باغ میں پودوں کی قطاریں معلوم کیجیے۔

(5) آٹھویں جماعت کی طالبات میں سے ہر ایک نے پانچ پانچ پیسے والے اتنے ہی سکے جمع کیے جتنی کہ کلاس میں کل طالبات تھیں۔ اگر کل چندہ کی رقم 20 روپیہ ہو تو بتایئے کہ اس جماعت میں کتنی طالبات تھیں اور ہر ایک نے کتنا چندہ دیا۔

(6) وہ کون سا چھوٹے سے چھوٹا عدد ہے جس سے 1176 کو ضرب کرنے سے مکمل مربع عدد حاصل ہو؟

(7) 1805 کو کس چھوٹے سے چھوٹے عدد سے تقسیم کریں کہ وہ مکمل مربع عدد بن جائے؟

(8) 12288 کو کس چھوٹے سے چھوٹے عدد سے ضرب دیں کہ ایک مکمل مربع عدد بن جائے؟

(9) وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کرو جس سے 2028 کو ضرب دے کر ایک مکمل مربع عدد حاصل ہو جائے؟

(10) 62612 میں سے وہ کون سا چھوٹے سے چھوٹا عدد نفی کیا جائے کہ ایک مکمل مربع عدد حاصل ہو جائے؟

(11) 62612 میں وہ کون سا چھوٹے سے چھوٹا عدد جمع کیا جائے کہ ایک مکمل مربع عدد حاصل ہو جائے؟

(12) 5 ہندسوں کا وہ بڑے سے بڑا عدد معلوم کیجیے جو مکمل مربع ہو؟

(13) 5 ہندسوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جو مکمل مربع ہو؟

(14) 4 ہندسوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جو مکمل مربع ہو؟

(15) چار ہندسوں کا وہ بڑے سے بڑا عدد معلوم کیجیے جو مکمل مربع ہو؟

(16) ایک سپہ سالار 800 سپاہیوں کو ایک مربع کی صورت میں ترتیب دینا چاہے تو بتائیں کہ اُس مربع کو مکمل کرنے کے لیے مزید کتنے سپاہی درکار ہوں گے؟

(17) ایک ڈرل ماسٹر صاحب نے جب 3605 لڑکوں کو ایک مربع کی صورت میں ترتیب دیا تو معلوم ہوا کہ 5 لڑکے باقی بچ رہے۔ بتائیں کہ ایک قطار میں کتنے لڑکے ہیں؟

(18) وہ چھوٹے سے چھوٹا مکمل مربع عدد معلوم کیجیے جو 16,10 اور 24 سے پورا پورا تقسیم ہو جائے۔

(19) ایک رسالے میں سپاہیوں کی کم سے کم تعداد کیا ہونی چاہیئے جن کو 10، 15 اور 25 سپاہی فی قطار کے حساب ایک مربع کی شکل میں ترتیب دیا جا سکے۔

پانچواں باب

الجبری اظہاریے، کلیات و اجزائے ضربی

5.1 الجبری اظہاریوں میں خطوط وحدانی کا استعمال

ریاضی میں بعض اوقات الجبری اظہاریے (Algebraic Expressions) کے مختلف حصوں کو سمجھنے کے لیے ان کو خطوطِ وحدانی کے ذریعے ایک دوسرے سے علیحدہ کیا جاتا ہے۔ اس کے لیے تین قسم کے خطوطِ وحدانی استعمال کیے جاتے ہیں :

1. چھوٹی خطوط وحدانی یا قوسین "( )"
2. درمیانی خطوطِ وحدانی "{ }"
3. بڑی خطوطِ وحدانی "[ ]"

مندرجہ بالا خطوطِ وحدانی کے علاوہ خطوطِ وحدانی کی ایک اور قسم بھی استعمال کی جاتی ہے۔ جسے قطعۂ خط یا بار (Bar) کہا جاتا ہے۔ اور اِسے علامتی طور پر یوں "—" ظاہر کرتے ہیں۔

ایسے الجبری اظہاریے جن میں خطوطِ وحدانی استعمال کیے گئے ہوں کو مندرجہ ذیل ترتیب سے مختصر کیا جاتا ہے۔

1. پہلے قطعۂ خط کے نیچے لکھی ہوئی رقوم کو مختصر کیا جاتا ہے۔
2. چھوٹی خطوطِ وحدانی میں ایک جیسی رقوم (اگر موجود ہوں) کو مختصر کیا جاتا ہے۔
3. چھوٹی خطوطِ وحدانی کو ہٹایا جاتا ہے۔
4. درمیانی خطوطِ وحدانی میں ایک جیسی رقوم (اگر موجود ہوں) کو مختصر کیا جاتا ہے۔
5. درمیانی خطوطِ وحدانی کو ہٹایا جاتا ہے۔
6. بڑی خطوطِ وحدانی میں ایک جیسی رقوم (اگر موجود ہوں) کو مختصر کیا جاتا ہے۔
7. آخر میں بڑی خطوطِ وحدانی کو ہٹا کر موجود ایک جیسی رقوم کو مختصر کیا جاتا ہے۔

اِس طریقہ کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1۔ مختصر کیجیے۔

$$5 [3a - \{ a - (a + b - \overline{2a - b}) + b \} - 2b]$$

حل:

$$5 [3a - \{ a - (a + b - \overline{2a - b}) + b \} - 2b]$$

قطعہ خط کے نیچے دی ہوئی رقوم کو 1- سے ضرب دینے پر

$$= 5 [3a - \{ a - (a + b - 2a + b) + b \} - 2b]$$

قوسین میں ایک جیسی رقوم کو مختصر کرنے سے

$$= 5 [3a - \{ a - (-a + 2b) + b \} - 2b]$$

قوسین کی اندرونی رقوم کو 1- سے ضرب دینے پر

$$= 5 [3a - \{ a + a - 2b + b \} - 2b]$$

درمیانی خطوطِ وحدانی میں ایک جیسی رقوم کو مختصر کرنے سے

$$= 5 [3a - \{ 2a - b \} - 2b]$$

درمیانی خطوطِ وحدانی کی اندرونی رقوم کو 1- سے ضرب دینے پر

$$= 5 [3a - 2a + b - 2b]$$

بڑی خطوطِ وحدانی میں ایک جیسی رقوم کو مختصر کرنے سے

$$= 5 [a - b]$$

بڑی خطوطِ وحدانی کی اندرونی رقوم کو 5 سے ضرب دینے پر

$$= 5a - 5b$$

مثال 2۔ مختصر کیجیے۔

$$9x - 3 \{ y - 2 (3x + y) + (3y - x) \}$$

حل:

$$9x - 3 \{ y - 2 (3x + y) + (3y - x) \}$$

$$= 9x - 3 \{ y - 6x - 2y + 3y - x \}$$

$$= 9x - 3 \{ - 6x - x + y - 2y + 3y \}$$

$$= 9x - 3 \{ - 7x + 2y \}$$

$$= 9x + 21x - 6y$$

$$= 30x - 6y$$

مثال 3۔ مختصر کیجیے۔

$$4[a-3\{a-2(b-c)+2c\}-4(a-b)]$$

حل:

$$4[a-3\{a-2(b-c)+2c\}-4(a-b)]$$
$$=4[a-3\{a-2b+2c+2c\}-4a+4b]$$
$$=4[a-3\{a-2b+4c\}-4a+4b]$$
$$=4[a-3a+6b-12c-4a+4b]$$
$$=4[a-3a-4a+6b+4b-12c]$$
$$=4[-6a+10b-12c]$$
$$=-24a+40b-48c$$

مشق 5.1

مختصر کیجیے۔

1۔ $4a-\{3a-(2a-a)\}$

2۔ $a-[a-\{a-(a-c)\}]$

3۔ $a-[a-\{a-(a+b)\}]$

4۔ $2x-[3x-\{5x-(5x-6x)+2x\}]$

5۔ $7+[6-2(3+x)-4(x-2)]$

6۔ $2p\{p-q-(p-2q)\}$

7۔ $5y(x-2y)-2x\{x-(x-y)\}$

8۔ $2\{a(a-b)-b(a+b)\}$

9۔ $2c^2-[c(c+2d)-d(c+d)]$

10۔ $3[x-\{2-2(x-1)\}+x]$

11۔ $a-[3a+c-\{4a(3b-c)\}+3b]$

12۔ $5a-[2a-2\{a-(a-1)\}+2]$

13۔ $6a-[3b-\{2a-(6a-3b)\}]$

14۔ $a-[3b+\{3c-2a-(a-b)\}+2a-(b-3c)]$

15۔ $3[a-2\{b-4(c-d)\}]-4[a-3\{b+4(c+d)\}]$

16۔ $a+\{-2b+3(c-\overline{d-c})\}$

17۔ $3p-\{5q-(3p+2q)-(2p-\overline{q+p})\}$

18۔ $3(5-6x)-5[x-5\{1-3(x-\overline{3+x})\}]$

19. $12-[\,6a-(7-\overline{a-5})-\{5a+(3-\overline{2-a})\}\,]$

20. $84-7\,[-11x-4\,\{-17+3\,(8-\overline{9-5x})\}\,]$

5.2 کلیات اور ان کا اطلاق

الجبری اظہاریوں کو مختصر کرنے یا ان کی تجزی کرنے کے لیے ہم مختلف کلیات استعمال کرتے ہیں۔ اس باب میں ہم کچھ اہم کلیات کا استعمال سیکھیں گے۔

-1 کلیہ $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

ثبوت:
ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b)$$

اب $(a+b)$ کو $(a+b)$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{array}{rl} & a + b \\ \times & a + b \\ \hline & a^2 + ab \\ & \quad + ba + b^2 \\ \hline & a^2 + 2ab + b^2 \quad (\because ba = ab) \end{array}$$

اس کلیہ کو یوں بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)\,(a+b) \\ &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

اس کلیہ کو الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے:

"دو رقوم کے مجموعے کا مربع برابر ہوتا ہے، پہلی رقم کا مربع جمع دونوں رقوم کے حاصل ضرب کا دُگنا جمع دوسری رقم کا مربع"

مثال 1۔ $(a+5)$ کا مربع معلوم کیجیے۔

حل:

$(a+5)$ کا مربع $(a+5)^2$ ہے۔

کیونکہ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اس لیے $(a+5)^2 = a^2 + 2 \times a \times 5 + 5^2$

$= a^2 + 10a + 25$

مثال 2۔ $(3a+2b)$ کا مربع معلوم کیجیے۔

حل:

کیونکہ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اس لیے $(3a+2b)^2 = (3a)^2 + 2(3a)(2b) + (2b)^2$

$= 9a^2 + 12ab + 4b^2$

مثال 3۔ $\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b\right)$ کا مربع معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اس لیے $\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b\right)^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{1}{4}b\right) + \left(\frac{1}{4}b\right)^2$

$= \frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{3} \times \frac{1}{4}ab + \frac{1}{16}b^2$

$= \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{16}b^2$

مثال 4۔ $(4a+3b)^2 - (2a+b)^2$ کو کلیہ کی مدد سے مختصر کیجیے۔

حل:

$(4a+3b)^2 - (2a+b)^2 = (16a^2 + 24ab + 9b^2) - (4a^2 + 4ab + b^2)$

$= 16a^2 + 24ab + 9b^2 - 4a^2 - 4ab - b^2$

$= 16a^2 - 4a^2 + 24ab - 4ab + 9b^2 - b^2$

$= 12a^2 + 20ab + 8b^2$

مثال 5۔ کلیہ کی مدد سے $(103)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$(103)^2 = (100+3)^2$$

کلیہ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ کی مدد سے

$$(103)^2 = (100)^2 + 2(100)(3) + (3)^2$$

$$= 10000 + 600 + 9$$

پس $(103)^2 = 10609$

مشق 5.2

ذیل کے اظہاریوں کا مربع کلیہ کی مدد سے معلوم کیجیے۔

(1) $3a+4$ (2) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$ (3) $\frac{3}{2}a + \frac{2}{3}b$

(4) $3x+5y$ (5) $5+2a$ (6) $4a+5b$

(7) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3}$ (8) $\frac{3x}{2} + \frac{2y}{5}$ (9) $b + \frac{2}{3}c$

(10) $\frac{3}{5}d + 5c$

مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

(11) $(x+y)^2 - (5x+2y)^2$ (12) $(5a+3b)^2 - (3a+2b)^2$

(13) $\left(\frac{2}{3}a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2$ (14) $(2ab+3c)^2 + (3ab+2c)^2$

(15) $(9d^2+5c^2)^2 + (3d^2+2c^2)^2$

کلیہ کی مدد سے مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(16) $(102)^2$ (17) $(104)^2$ (18) $(105)^2$

(19) $(203)^2$ (20) $(204)^2$

II ۔ کلیہ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

ثبوت : ہم جانتے ہیں کہ

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

اب $(a-b)$ کو $(a-b)$ سے ضرب دیتے ہیں :

$$\begin{array}{r} a-b \\ \times\, a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ba+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array} \qquad (\because ba = ab)$$

اس کلیہ کو یوں بھی ثابت کیا جا سکتا ہے ۔

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

$$= a(a-b)-b(a-b)$$

$$= a^2-ab-ab+b^2$$

$$= a^2-2ab+b^2$$

اس کلیہ کو الفاظ میں یوں بیان کیا جا سکتا ہے :

" دو رقوم کے فرق کا مربع برابر ہے پہلی رقم کا مربع تفریق دونوں رقوم کے حاصل ضرب کا دگنا جمع دوسری رقم کا مربع "

مثال 1 ۔ $(a-4)$ کا مربع معلوم کیجیے ۔

حل : کیونکہ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

اس لیے $(a-4)^2 = (a)^2-2(a)(4)+(4)^2$

$$= a^2-8a+16$$

مثال 2۔ $\left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}y\right)$ کا مربع کلیہ کی مدد سے معلوم کیجیے۔

حل:

کیونکہ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

اس لیے $\left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2 = \left(\frac{4}{5}x\right)^2 - 2\left(\frac{4}{5}x\right)\left(\frac{1}{3}y\right) + \left(\frac{1}{3}y\right)^2$

$$= \frac{16}{25}x^2 - \frac{8}{15}xy + \frac{1}{9}y^2$$

مثال 3۔ کلیہ کی مدد سے $(97)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:

$$(97)^2 = (100-3)^2$$

کیونکہ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

اس لیے $(97)^2 = (100)^2 - 2(100)(3) + (3)^2$

$$= 10000 - 600 + 9$$

پس $(97)^2 = 9409$

نامعلوم مقدار معلوم کرنا

مثال 1۔ اگر $a^2 + (\ ) + 9b^2$ دو رقوم کے مجموعے کا مربع ہو تو نامعلوم رقم معلوم کیجیے۔

حل: a^2 اور $9b^2$ بالترتیب a اور $3b$ کے مربع ہیں۔ اس لیے نامعلوم رقم a اور $3b$ کے حاصل ضرب کے دُگنے کے برابر ہے۔

یعنی $2(a)(3b) = 6ab$

پس خالی جگہ پر $6ab$ رکھنے سے یہ مکمل مربع بن جاتا ہے۔

مثال 2۔ اگر $4x^2 + 24xy + (\ )$ دو رقوم کے مجموعے کا مربع ہو تو نامعلوم رقم معلوم کیجیے۔

حل: سوال سے ظاہر ہوتا ہے کہ نامعلوم مقدار دوسری رقم کا مربع ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ درمیان والی مقدار $2ab$ ہوتی ہے۔

اور اس سوال میں درمیانی مقدار $2(2x)(6y)$ ہے۔
یعنی دوسری رقم کی مقدار $6y$ ہے اور اس کا مربع $36y^2$ ہوتا ہے۔
پس خالی جگہ پر $36y^2$ رکھنے سے مکمل مربع حاصل ہوتا ہے۔

مشق 5.3

مندرجہ ذیل کا مربع کلیہ کی مدد سے معلوم کیجیے۔

(1) $(2a-3)$ (2) $(3x-2)$ (3) $\left(\frac{3}{2}xy - \frac{1}{2}y\right)$

(4) $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right)$ (5) $\left(\frac{2a}{3} - 3b\right)$ (6) $(3x^2 - 2y^2)$

مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

(7) $(a+b)^2 + (a-b)^2$ (8) $(a+b)^2 - (a-b)^2$

(9) $(2a-3b)^2 + (3a-2b)^2$ (10) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{2}b\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a - \frac{2}{3}b\right)^2$

کلیہ کی مدد سے مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(11) $(98)^2$ (12) $(99)^2$ (13) $(95)^2$

(14) $(197)^2$ (15) $(198)^2$ (16) $(58)^2$

مندرجہ ذیل اظہاریوں میں نامعلوم رقم معلوم کیجیے۔

(17) $16a^2 + (\ ) + 9b^2$ (18) $\frac{25}{16}x^2 + (\ ) + \frac{16}{25}y^2$

(19) $\frac{16}{25}a^2 - (\ ) + \frac{25}{16}b^2$ (20) $16x^2 - (\ ) + 9$

(21) $25a^2b^2 - 30abc + (\ )$ (22) $49x^2 - 28xy + (\ )$

III - کلیہ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

ثبوت:
$(a-b)$ کو $(a+b)$ سے ضرب دیتے ہیں:

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times \quad a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array} \quad (\because ab-ab=0)$$

اس کلیہ کو یوں بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b)+b(a-b)\\ &= a^2-ab+ab-b^2\\ &= a^2-b^2 \qquad (\because -ab+ab=0)\end{aligned}$$

اس کلیہ کو الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے۔

"دو رقوم کے مجموعہ اور فرق کا حاصل ضرب دونوں رقوم کے مربع کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔"

مثال 1۔ کلیہ کی مدد سے حل کیجیے۔

$$(x+2)(x-2)$$

حل:

$$\begin{aligned}(x+2)(x-2) &= (x)^2-(2)^2\\ &= x^2-4\end{aligned}$$

مثال 2۔ کلیہ کی مدد سے $(2x-y)\ (2x+y)$ کو حل کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned}(2x+y)(2x-y) &= (2x)^2-(y)^2\\ &= 4x^2-y^2\end{aligned}$$

مثال 3۔ کلیہ کی مدد سے $(98)\ (102)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ

$$(102)(98)=(100+2)(100-2)$$

اس لیے $= (100)^2 - (2)^2$

$= 10000 - 4$

$= 9996$

مثال 4۔ مسلسل حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$

(ii) $(4x+3y)(4x-3y)(16x^2+9y^2)$

حل: (i) کیونکہ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

اس لیے $(a+b)(a-b)(a^2+b^2) = (a^2 - b^2)(a^2+b^2)$

کلیہ کو دوبارہ استعمال کرنے سے

$= (a^2)^2 - (b^2)^2$

$= a^4 - b^4$

(ii) کلیہ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ کی مدد سے

$(4x+3y)(4x-3y)(16x^2+9y^2) = \{(4x)^2 - (3y)^2\}(16x^2+9y^2)$

$= (16x^2 - 9y^2)(16x^2+9y^2)$

کلیہ کو دوبارہ استعمال کرنے سے

$= (16x^2)^2 - (9y^2)^2$

$= 256x^4 - 81y^4$

مشق 5.4

کلیہ کی مدد سے مندرجہ ذیل کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(1) $(p+2q)(p-2q)$ (2) $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

(3) $(px+q)(px-q)$ (4) $(ab-c)(ab+c)$

(5) $(3x+y)(3x-y)$ (6) $(abc-d^2)(abc+d^2)$

(7) $(3a+2b)(3a-2b)$ (8) $(a^2-2b^2)(a^2+2b^2)$

(9) $(1-x^3)(1+x^3)$ (10) $(a-bx)(a+bx)$

کلیہ کی مدد سے مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(11) (64)(56) (12) (145)(135) (13) (31)(29)

(14) (53)(47) (15) (95)(85)

مسلسل حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(16) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$

(17) $(2a+3b)(2a-3b)(4a^2+9b^2)$

(18) $(4x+5y)(4x-5y)(16x^2+25y^2)$

(19) $(5a+4b)(5a-4b)(25a^2+16b^2)$

(20) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

(21) $(a-b)$ کی قیمت معلوم کیجیے اگر

$a^2-b^2=40$ اور $(a+b)=8$

(22) (a^2+b^2) کی قیمت معلوم کیجیے۔ اگر

$ab=24$ اور $a+b=12$

(23) $(a+b)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ اگر

$a^2-b^2=16$ اور $a-b=8$

۱۷- کلیہ

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

ثبوت: $(x+a)$ کو $(x+b)$ سے ضرب دیتے ہیں:

$$\begin{array}{r} x+a \\ \times\ x+b \\ \hline x^2+ax \\ +bx+ab \\ \hline x^2+ax+bx+ab \end{array}$$

$$=x^2+(a+b)x+ab$$

اس کلیہ کو یوں بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:

$$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$$
$$= x^2 + bx + ax + ab$$
$$= x^2 + (b+a)x + ab$$
$$= x^2 + (a+b)x + ab \qquad (\because b+a = a+b)$$

یہ کلیہ a اور b کی ہر قیمت کے لیے خواہ وہ مثبت ہو یا منفی درست ہے۔ اس کلیہ کی مدد سے مکمل ضرب کا عمل کیے بغیر حاصل ضرب معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں:

(1) $(a+2)(a+5) = a^2 + (2+5)a + 2 \times 5$
$$= a^2 + 7a + 10$$

(2) $(a-4)(a-5) = a^2 + (-4-5)a + (-4)(-5)$
$$= a^2 + (-9)a + 20$$
$$= a^2 - 9a + 20$$

(3) $(a+3)(a-4) = a^2 + (3-4)a + (3)(-4)$
$$= a^2 + (-1)a - 12$$
$$= a^2 - a - 12$$

(4) $(a+5)(a-3) = a^2 + (5-3)a + (5)(-3)$
$$= a^2 + 2a - 15$$

V- کلیہ

$$\boxed{(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd}$$

ثبوت: $(ax+b)$ کو $(cx+d)$ سے ضرب دیتے ہیں:

$$\begin{array}{r} ax + b \\ + \; cx + d \\ \hline acx^2 + bcx \\ + adx + bd \\ \hline acx^2 + adx + bcx + bd \end{array}$$

$$= acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

اس کلیہ کو یوں بھی ثابت کیا جاسکتا ہے :

$$(ax + b)(cx + d) = ax(cx + d) + b(cx + d)$$

$$= acx^2 + adx + bcx + bd$$

$$= acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

نکتہ: اگر $a = c = 1$ لیں تو

کلیہ کو یوں لکھا جاتا ہے

$$(x + b)(x + d) = x^2 + (b + d)x + bd$$

اس طرح ہمیں وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے جو کلیہ IV میں بتایا جاچکا ہے۔

مثال I۔ $(3a + 5)(4a - 7)$ کو حل کیجیے۔

حل: کیونکہ

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

اس لیے

$$(3a + 5)(4a - 7) = (3)(4)a^2 + \{(3)(-7) + (5)(4)\}a + (5)(-7)$$

$$= 12a^2 + (-21 + 20)a - 35$$

$$= 12a^2 + (-1)a - 35$$

$$= 12a^2 - a - 35$$

مشق 5.5

کلیہ کی مدد سے حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(1) $(a + 2)(a + 3)$ (2) $(x + b)(x + c)$

(3) $(p - 3q)(p + 2q)$ (4) $(p + 5q)(p - 4q)$

(5) $(b - 5c)(b - 2c)$ (6) $(d - 12)(d - 10)$

(7) $(2a + b)(2a + 3b)$ (8) $(x + 2y)(x + 3y)$

(9) $(x - 2y)(x + 2y)$ (10) $(5y + 3z)(5y - 3z)$

(11) $(xy-3d)(xy+d)$ (12) $(abc+d)(abc-3d)$

(13) $(a+b)(c+d)$ (14) $(ax+5)(bx+3)$

(15) $(3a+5b)(4a-3b)$ (16) $(6x-3y)(5x-2y)$

5.3 $(Ka \pm Kb \pm Kc)$ کی طرز کے الجبری اظہاریوں کی تجزی کرنا

مثال 1۔ $2a+2b+2c$ کی تجزی $2(a+b+c)$ ہے۔

یعنی جو عدد ہر رقم کا مشترک جزوضربی ہے اُس کو بار بار لکھنے کی بجائے ایک بار لکھ کر باقی رقوم کو خطوطِ وحدانی میں لکھ دیتے ہیں۔ جس کا مطلب ہے کہ جو عدد خطوط وحدانی سے باہر ہے وہ اندر والی ہر رقم سے ضرب ہوتا ہے۔

مثال 2۔ $2a+4b+6c$ اس میں 2 ایسا عدد ہے جو ہر رقم کا جزوضربی ہے لہٰذا $2(a+2b+3c)$ دیئے ہوئے اظہاریے کی تجزی ہے۔ یعنی خطوطِ وحدانی کے اندر کی ہر رقم دیئے ہوئے اظہاریے کی ہر رقم کو مشترک جزوضربی سے تقسیم کر کے حاصل کی گئی ہے لہٰذا

$2a$ کو 2 سے تقسیم کرنے پر صرف a حاصل ہوا۔ اسی طرح $4b$ کو 2 سے تقسیم کرنے پر $2b$ اور $6c$ کو 2 سے تقسیم کرنے پر $3c$ حاصل ہوا۔

مثال 3۔ $9x^3+6x^2+27$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$9x^3+6x^2+27 = 3(3x^3+2x^2+9)$$

مثال 4۔ $\frac{81}{32}a^3b^2+\frac{27}{16}a^2b^2+\frac{3}{4}ab$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$\frac{81}{32}a^3b^2+\frac{27}{16}a^2b^2+\frac{3}{4}ab$$

$$= \frac{3}{4}ab\left(\frac{27}{8}a^2b+\frac{9}{4}ab+1\right)$$

مثال 5۔ $(a+b)x+5(a+b)$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$(a+b)x+5(a+b) = (a+b)(x+5)$$

مثال 6۔ $\frac{3a}{5} + \frac{xy}{5}$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$\frac{3a}{5} + \frac{xy}{5} = \frac{1}{5}(3a + xy)$$

مثال 7۔

$\frac{2ab}{5} - \frac{3cd}{10} + \frac{4d}{15}$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$\frac{2ab}{5} - \frac{3cd}{10} + \frac{4d}{15} = \frac{1}{5}\left(2ab - \frac{3cd}{2} + \frac{4d}{3}\right)$$

مشق 5.6

مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

(1) $10ax^2-5x$ (2) y^4-y^2+y (3) $2a^3+4a^2-8a$

(4) $mx^2-mx-2m$ (5) $6+9a+3a^2$ (6) ax^2+2axb

(7) $a^2b+ab^2+ac^2$ (8) $4abc^2-12a^2bc$ (9) $(a+b)x^2+6(a+b)x$

(10) $\frac{ax}{2} - \frac{bx}{2}$ (11) $3a(x+y)+2b(x+y)$

(12) $5a(f+g)+7b(f+g)$ (13) $\frac{ab}{7} - \frac{bc}{14} + \frac{cd}{21}$

(14) $\frac{fg}{2a} + \frac{xy}{2a} + \frac{1}{2a}$ (15) $\frac{ce}{9} + \frac{ed}{18} - \frac{ef}{9}$

5.4 $ab+bc+ad+cd$ کی طرز کے الجبری اظہاریوں کی تجزی کرنا۔

مثال 1۔ $ab+bc+ad+cd$ کی تجزی کیجیے

حل:

ہم دیکھتے ہیں کہ پہلی دو رقوم میں b مشترک جزو ہے جبکہ اس کے بعد کی دو رقوم میں مشترک جزو d ہے۔ لہٰذا پہلی دو رقوم سے b اور دوسری دو رقوم سے d مشترک لیتے ہیں۔ یعنی

$$ab+bc+ad+cd = b(a+c)+d(a+c)$$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ $(a+c)$ دونوں رقوم میں مشترک جزو ہے۔

اس لیے $ab+bc+ad+cd = (a+c)(b+d)$

مثال 2۔ $fg + gh + fk + hk$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$fg + gh + fk + hk = g(f+h) + k(f+h)$$

$$= (f+h)(g+k)$$

مثال 3۔ $3ac + bd + 3ad + bc$ کی تجزی کیجیے۔

حل: یہاں پہلی دو رقوم میں کوئی بھی جزو مشترک نہیں ہے۔ لیکن اگر پہلی اور تیسری رقم کو اور دوسری اور آخری رقم کو یکجا لکھا جائے تو ہم مشترک جزوِ ضربی معلوم کر سکتے ہیں۔

لہٰذا

$$3ac + bd + 3ad + bc = 3ac + 3ad + bd + bc$$

$$= 3a(c+d) + b(d+c)$$

$$= 3a(c+d) + b(c+d)$$

$$= (c+d)(3a+b)$$

مشق 5.7

مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

(1) $2ab + 2bc + 3ad + 3cd$ (2) $5fg + 5gh + 2fp + 2hp$

(3) $af + ag + bf + bg$ (4) $xy + xz + 2uy + 2uz$

(5) $ac + 2ad + 2bc + 4bd$ (6) $6ac + 9bc + 4ad + 6bd$

(7) $3fg + 5ef + 3hg + 5eh$ (8) $xy + 2uy + xz + 2uz$

(9) $3ad + 2bc + 3cd + 2ab$ (10) $3fk + 5gh - 5fh - 3gk$

5.5 $a^2 + 2ab + b^2$ کی طرز کے الجبری اظہاریوں کی تجزی کرنا

ہمیں معلوم ہے کہ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ یعنی دو رقوم پر مشتمل ایک مربع کا حاصل ضرب تین رقوم پر مشتمل ہوتا ہے۔ جن میں دو رقوم (پہلی اور آخری) مربع اور درمیانی رقم پہلی اور دوسری رقم کے حاصل ضرب کا دُگنا ہوتی ہے۔ اسی اصول کے تحت ہم $a^2 + 2ab + b^2$ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں۔

مثال 1۔

$a^2 + 6ab + 9b^2$ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے۔

حل: اس مثال میں a^2 اور $9b^2$ بالترتیب a اور $3b$ کے مربع ہیں۔ یعنی

$a^2 = (a)^2$ اور $9b^2 = (3b)^2$

اب ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ درمیانی رقم $6ab$ مطلوبہ مربع کے لیے درست ہے یا نہیں۔

یعنی $6ab = 2(a)(3b)$

پس درمیانی رقم ہی مطلوبہ رقم ہے۔

لہٰذا $a^2 + 6ab + 9b^2$ ایک مکمل مربع ہے اور اس کے اجزائے ضربی $(a + 3b)^2$ ہیں

لہٰذا $a^2 + 6ab + 9b^2 = (a)^2 + 2(a)(3b) + (3b)^2$

$= (a + 3b)^2$

مثال 2۔

$4a^2 + 12ab + 9b^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل: اس مثال میں $4a^2$ اور $9b^2$ بالترتیب $2a$ اور $3b$ کے مربع ہیں۔ یعنی

$4a^2 = (2a)^2$ اور $9b^2 = (3b)^2$

اسی طرح $12ab = 2(2a)(3b)$

لہٰذا $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2$

$= (2a + 3b)^2$

مثال 3۔

$9 + 30a + 25a^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل: $9 + 30a + 25a^2 = (3)^2 + 2(3)(5a) + (5a)^2$

$= (3 + 5a)^2$

مثال 4۔

$4a^4 + 20a^2bc + 25b^2a^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل: $4a^2 + 20a^2bc + 25b^2c^2 = (2a^2)^2 + 2(2a^2)(5bc) + (5bc)^2$

$= (2a^2 + 5bc)^2$

مشق 5.8

مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

(1) $a^2+10a+25$
(2) b^2+6b+9
(3) $x^2+2xy+y^2$
(4) $x^2+x+\frac{1}{4}$
(5) $x^2+2+\frac{1}{x^2}$
(6) $16b^2+40ba+25a^2$
(7) $25r^2+30rs+9s^2$
(8) $9y^2z^2+6xyz+x^2$
(9) $16r^2+8rs+s^2$
(10) $4b^2c^2+20bcd+25d^2$
(11) $4p^2+12pq+9q^2$
(12) $49f^2+70fg+25g^2$

5.6 $a^2-2ab+b^2$ کی طرز کے الجبری اظہاریوں کی تجزی کرنا

مثال 1۔ $y^2-2yx+x^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

اس لیے $y^2-2yx+x^2=(y)^2-2(y)(x)+(x)^2$

$=(y-x)^2$

مثال 2۔ $9a^2-6a+1$ کی تجزی کیجیے۔

حل: $9a^2-6a+1=(3a)^2-(2)(3a)(1)+(1)^2$

$=(3a-1)^2$

مثال 3۔ $9b^2-24bc+16c^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل: $9b^2-24bc+16c^2=(3b)^2-2(3b)(4c)+(4c)^2$

$=(3b-4c)^2$

مثال 4۔

$98c^2-140cd+50d^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل: اس مثال میں پہلی اور آخری رقم مربع نہیں ہے۔ لیکن اس الجبری اظہاریے سے 2 مشترک لینے سے پہلی اور آخری رقوم مربع بن جاتی ہیں۔ یعنی

$$98c^2-140cd+50d^2 = 2(49c^2-70cd+25d^2)$$
$$= 2\{(7c)^2-2(7c)5d+(5d)^2\}$$
$$= 2(7c-5d)^2$$

یاد رکھنے کی باتیں:

(i) ایک مکمل مربع الجبری اظہاریے میں پہلی اور آخری رقوم ہمیشہ مثبت مکمل مربع ہوتی ہیں۔

(ii) (آخری رقم کا جذر) (پہلی رقم کا جذر) 2 = درمیانی رقم

(iii) اجزائے ضربی کی صورت میں لکھنے کے لیے پہلی رقم کا جذر اور درمیانی رقم کے ساتھ جو بھی علامت (مثبت یا منفی) ہو، لکھ کر آخری رقم کا جذر لکھتے ہیں۔ اور اس پر مربع کی علامت لگاتے ہیں۔ یعنی

^{2}(آخری رقم کا جذر $\pm$ پہلی رقم کا جذر)

مشق 5.9

مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

(1) b^2-6b+9 (2) $x^2-2xy+y^2$ (3) $4a^2-8ab+4b^2$

(4) $y^2-2+\frac{1}{y^2}$ (5) $x^2-x+\frac{1}{4}$ (6) $1-2xy+x^2y^2$

(7) $16-8f+f^2$ (8) $9f^2g^2-6fgh+h^2$ (9) $50a^2-140ab+98b^2$

(10) $18b^2-48bc+32c^2$

5.7 a^2-b^2 کی طرز کے الجبری اظہاریوں کی تجزی کرنا

جیساکہ ہم جانتے ہیں کہ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

یا $(a)^2-(b)^2=(a+b)(a-b)$

یعنی دو رقوم کے مربعوں کا فرق ان دونوں رقوم کے مجموعے اور فرق کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔

مثال 1۔ $9x^2-4y^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$9x^2-4y^2=(3x)^2-(2y)^2$$
$$=(3x+2y)(3x-2y)$$

مثال 2۔ $(a+b)^2-9c^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$(a+b)^2-9c^2=(a+b)^2-(3c)^2$$
$$=\{(a+b)+3c\}\{(a+b)-3c\}$$
$$=(a+b+3c)(a+b-3c)$$

مثال 3۔ $(f-g)^2-(x-y)^2$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$(f-g)^2-(x-y)^2$$
$$=\{(f-g)+(x-y)\}\{(f-g)-(x-y)\}$$
$$=(f-g+x-y)(f-g-x+y)$$

مشق 5.10

1 مندرجہ ذیل کی تجزی کیجیے۔

(1) x^2-y^2 (2) p^2-q^2 (3) p^2-4q^2

(4) $a^2c^2-d^2$ (5) x^2-25 (6) $49-x^2$

(7) $196a^2b^2-25c^2$ (8) $144x^2y^2z^2-49$ (9) $(f+g)^2-64h^2$

(10) $(x+y)^2-81d^2$ (11) $25d^4-(a^2+b^2)^2$

(12) $(x-y)^2 - (t+v)^2$ (13) $(a-b)^2 - (2d+3c)^2$

(14) $(2a+3b)^2 - (3c-2d)^2$ (15) $(2x^2+y^2)^2 - (3s^2+4t^2)^2$

5.8 ax^2+bx+c کی طرز کے الجبری اظہاریوں کی تجزی کرنا

مثال 1۔ x^2+5x+6 کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے۔

حل: یہاں x^2+5x+6 دو جزو ضربی کا حاصل ضرب ہے۔ لیکن یہ اظہاریہ مکمل مربع نہیں ہے۔اور درمیانی رقم دو مختلف رقوم کو جمع یا تفریق کر کے حاصل کی گئی ہے۔ ایسی صورت میں پہلی رقم (جو کہ مربع ہے) کے عددی سر (Co-efficient) کو آخری رقم سے ضرب کرتے ہیں۔ اور حاصل ضرب کے دو ایسے اجزاء معلوم کرتے ہیں جن کا حاصل جمع درمیانی رقم کے عددی سر کے برابر ہو۔ یہاں x^2 کا عددی سر 1 اور آخری رقم 6 ہے۔ ان کا حاصل ضرب $6 \times 1 = 6$ ہے۔ اس کے دو اجزاء 2 اور 3 ایسے ہیں جن کا حاصل جمع 5 درمیانی رقم کے عددی سر کے برابر ہے۔ یعنی مندرجہ بالا اظہاریے کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$x^2+(3+2)x+6$$

$$=x^2+3x+2x+6$$

$$=x(x+3)+2(x+3)$$ دونوں جوڑوں سے مشترک نکالنے سے

$$=(x+3)(x+2)$$

مثال 2۔ $5x^2-7x-6$ کی تجزی کیجیے۔

حل:

$$5x^2-7x-6$$

$$=5x^2+(-10+3)x-6$$

$$=5x^2-10x+3x-6$$

$$=5x(x-2)+3(x-2)$$

$$=(x-2)(5x+3)$$

مثال 3 ۔ $3x^2 - 14xy + 8y^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل:

$$3x^2 - 14xy + 8y^2$$
$$= 3x^2 + (-12 - 2)xy + 8y$$
$$= 3x^2 - 12xy - 2xy + 8y^2$$
$$= 3x(x - 4y) - 2y(x - 4y)$$
$$= (x - 4y)(3x - 2y)$$

مشق 5.11

مندرجہ ذیل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے۔

(1) $x^2 + x - 2$
(2) $x^2 + 4x - 5$
(3) $x^2 - 4x - 5$
(4) $a^2 - 4ab + 4b^2$
(5) $p^2 - 12pq + 36q^2$
(6) $x^2 - 12x + 27$
(7) $x^2 + 20x + 51$
(8) $x^2 - 18x + 65$
(9) $x^2 - 10x + 25$
(10) $x^2 + 22x + 120$
(11) $54x^2 - 3xy - y^2$
(12) $26a^2 + 11a - 1$
(13) $240x^2 + x - 1$
(14) $43x^2 - 42x - 1$
(15) $1 - 5ab + 6a^2b^2$
(16) $x^2y^2 - 4xy - 32$
(17) $156x^2 - x - 1$
(18) $1 - 10xy + 25x^2y^2$
(19) $51x^2y^2 - 20xy + 1$
(20) $42a^2b^2 - ab - 1$
(21) $17x^2 + 16xy - y^2$
(22) $54x^2 + 21xy + y^2$
(23) $54x^2 - 15xy - y^2$
(24) $57 - 22x + x^2$
(25) $x^2y^2 - 16xy + 55$

چھٹا باب

یک درجی مساوات

6.1 اعادہ

ایسے جملے جو متغیر کی کچھ قیمتوں کے لیے درست ہوں اور کچھ کے لیے درست نہ ہوں، کھلے جملے کہلاتے ہیں۔ ایسا جملہ جس میں شرطِ مساوات "=" پائی جائے **مساوات** کہلاتا ہے۔ مساوات میں متغیر x کی ایسی قیمت جو مساوات کو درست بنائے، **مساوات کا اصل** (Root) کہلاتی ہے۔ اور مساوات کے تمام ممکنہ اصلوں کا سیٹ مساوات کا **حل سیٹ** کہلاتا ہے۔

ایک متغیر x پر مشتمل ایسی مساوات جس میں ایک رقم کا درجہ (Degree) ایک اور باقی رقموں کا درجہ ایک یا صفر ہو تو وہ متغیر x پر مشتمل **یک درجی مساوات** کہلاتی ہے۔

مثلاً

(i) $x+3=0$ (ii) $y+1=2$

(iii) $3x-6=x+2$ (iv) $4y+1=5y-2$

6.2 یک درجی مساوات کا حل سیٹ معلوم کرنا

یک درجی مساواتوں کو حل کرنے کے عمل کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1 حل سیٹ معلوم کیجیے۔

$$3x+2=11$$

حل:

$$3x+2=11$$

دونوں طرف دو نفی کرنے سے $(3x+2)-2=11-2$ یا

$(3x+2)-2=9$ یا

خاصیت تلازم بلحاظ جمع استعمال کرنے سے $3x+(2-2)=9$ یا

جمعی معکوس کی خاصیت استعمال کرنے سے $3x+0=9$ یا

جمعی ذاتی عنصر کی خاصیت استعمال کرنے سے $3x=9$ یا

دونوں طرف 3 سے تقسیم کرنے سے $\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$ یا

مختصر کرنے سے $\frac{{}^{1}\cancel{3}x}{\cancel{3}_1} = \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{3}}$ یا

$1 \times x = 3$ یا

ضربی ذاتی عنصر کی خاصیت استعمال کرنے سے $x = 3$ یا

پڑتال : دی ہوئی مساوات میں $x = 3$ درج کرنے سے

$3 \times 3 + 2 = 11$

یا $9 + 2 = 11$

یا $11 = 11$

کیونکہ $x = 3$ دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہے

پس حل سیٹ $\{3\}$ ہے۔

مثال 2۔ $\frac{5x+3}{7} = 4$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

حل : $\frac{5x+3}{7} = 4$

دونوں طرف 7 سے ضرب دینے سے $7\left(\frac{5x+3}{7}\right) = 4 \times 7$ یا

ضربی معکوس کی خاصیت استعمال کرنے سے $1 \times (5x+3) = 4 \times 7$ یا

ضربی ذاتی عنصر کی خاصیت استعمال کرنے سے $5x + 3 = 28$ یا

دونوں طرف 3 نفی کرنے سے $(5x+3) - 3 = 28 - 3$ یا

خاصیت تلازم بلحاظ جمع استعمال کرنے سے $5x + (3-3) = 25$ یا

جمعی معکوس استعمال کرنے سے $5x + 0 = 25$ یا

جمعی ذاتی عنصر کی خاصیت استعمال کرنے سے $5x = 25$ یا

دونوں طرف 5 سے تقسیم کرنے سے $\frac{5x}{5} = \frac{25}{5}$ یا

$1 \times x = 5 \times 1$ یا

ضربی ذاتی عنصر کی خاصیت استعمال کرنے سے $x = 5$ یا

پڑتال: دی ہوئی مساوات میں $x = 5$ درج کرنے سے

$$\frac{5 \times 5 + 3}{7} = 4$$

یا $\frac{25 + 3}{7} = 4$

یا $\frac{28}{7} = 4$

یا $\frac{\cancel{28}^{4}}{\cancel{7}_{1}} = 4$

یا $4 = 4$

$x = 5$ دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہے۔

پس حل سیٹ $\{5\}$ ہے۔

مثال 3۔

$\frac{5x}{7} + 10 = 5$ کو حل کیجیے۔

حل:

$$\frac{5x}{7} + 10 = 5$$

یا $\left(\frac{5x}{7} + 10\right) - 10 = 5 - 10$

یا $\frac{5x}{7} + (10 - 10) = -5$

یا $\frac{5x}{7} + 0 = -5$

یا $\frac{5x}{7} = -5$

یا $\frac{7}{5} \times \frac{5x}{7} = \frac{7}{5} \times (-5)$

یا $\left(\frac{7}{5} \times \frac{5}{7}\right) x = -7 \left(\frac{1}{5} \times 5\right)$

یا $1 \times x = -7$

یا $x = -7$

یا

پڑتال : دی ہوئی مساوات میں $x=-7$ درج کرنے سے،

$$\frac{5}{7}(-7)+10=5$$

یا $-5\left(\frac{1}{7}\times 7\right)+10=5$

یا $-5\times(1)+10=5$

یا $-5+10=5$

یا $5=5$

$x=-7$ ، دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہے۔

پس حل سیٹ $\{-7\}$ ہے۔

مثال 4۔

$2(x+2)-5(x+1)=-17$ کو حل کیجیے۔

حل :

$$2(x+2)-5(x+1)=-17$$

خطوطِ وحدانی کو حل کرنے سے یا $2x+4-5x-5=-17$

یا $-3x-1=-17$

یا $-3x-1+1=-17+1$

یا $-3x=-16$

یا $\frac{-3x}{-3}=-\frac{16}{-3}$

یا $x=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$

پڑتال : دی ہوئی مساوات میں $x=\frac{16}{3}$ درج کرنے سے

$$2\left(\frac{16}{3}+2\right)-5\left(\frac{16}{3}+1\right)=-17$$

یا $2\left(\frac{16+6}{3}\right)-5\left(\frac{16+3}{3}\right)=-17$

یا $2\left(\frac{22}{3}\right)-5\left(\frac{19}{3}\right)=-17$

یا $\frac{44}{3}-\frac{95}{3}=-17$

یا $\frac{44-95}{3}=-17$

یا $-\frac{51}{3}=-17$

یا $-17=-17$

$\frac{16}{3}=x$ دی ہوئی مساوات کو پورا کرتی ہے۔

پس حل سیٹ $\left\{\frac{16}{3}\right\}$ یا $\left\{5\frac{1}{3}\right\}$ ہے۔

مثال 5- حل کیجیے۔

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{1-x}{4}=2\frac{1}{2}$$

حل:

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{1-x}{4}=2\frac{1}{2}$$

یا $\frac{2x-1}{3}-\frac{1-x}{4}=\frac{5}{2}$

3 ، 4 اور 2 کے ذواضعاف اقل 12 سے ضرب دینے سے

یا $12\times\frac{2x-1}{3}-12\times\frac{1-x}{4}=12\times\frac{5}{2}$

یا $\overset{4}{\cancel{12}}\times\frac{2x-1}{\cancel{3}_1}-\overset{3}{\cancel{12}}\times\frac{1-x}{\cancel{4}_1}=\overset{6}{\cancel{12}}\times\frac{5}{\cancel{2}_1}$

یا $4(2x-1)-3(1-x)=6\times5$

یا $8x-4-3+3x=30$

یا $8x+3x-4-3=30$

یا $(8+3)x-7=30$

یا $11x-7=30$

یا $11x-7+7=30+7$

یا $11x=37$

یا $\frac{11x}{11}=\frac{37}{11}$

یا $x=\frac{37}{11}=3\frac{4}{11}$

پڑتال: دی گئی مساوات میں $x = \frac{37}{11}$ درج کرنے سے

یا $\dfrac{2 \times \frac{37}{11} - 1}{3} - \dfrac{1 - \frac{37}{11}}{4} = 2\frac{1}{2}$

یا $\dfrac{\frac{74}{11} - 1}{3} - \dfrac{1 - \frac{37}{11}}{4} = 2\frac{1}{2}$

یا $\dfrac{\frac{74-11}{11}}{3} - \dfrac{\frac{11-37}{11}}{4} = 2\frac{1}{2}$

یا $\dfrac{63}{11 \times 3} - \dfrac{(-26)}{11 \times 4} = 2\frac{1}{2}$

یا $\dfrac{\overset{21}{\cancel{63}}}{11 \times \cancel{3}_1} + \dfrac{\overset{13}{\cancel{26}}}{11 \times \cancel{4}_2} = 2\frac{1}{2}$

یا $\dfrac{21}{11} + \dfrac{13}{11 \times 2} = 2\frac{1}{2}$

یا $\dfrac{21}{11} + \dfrac{13}{22} = 2\frac{1}{2}$

یا $\dfrac{21 \times 2 + 13 \times 1}{22} = 2\frac{1}{2}$

یا $\dfrac{42 + 13}{22} = 2\frac{1}{2}$

یا $\dfrac{55}{22} = 2\frac{1}{2}$

یا $\dfrac{\overset{5}{\cancel{55}}}{\cancel{22}_2} = 2\frac{1}{2}$

$\dfrac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

یا $2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

کیونکہ $x = \frac{37}{11}$ مساوات کو پورا کرتی ہے۔

پس حل سیٹ $\left\{\frac{37}{11}\right\}$ یا $\left\{3\frac{4}{11}\right\}$ ہے۔

مثال 6. حل کیجیے۔ $4.2x + 1.5 = 3.7x + 9.6$

حل:

$$4.2x + 1.5 = 3.7x + 9.6$$

یا $4.2x + 1.5 - 1.5 = 3.7x + 9.6 - 1.5$

یا $4.2x = 3.7x + 8.1$

یا $4.2x - 3.7x = 3.7x + 8.1 - 3.7x$

یا $0.5x = 8.1$

یا $\frac{0.5x}{0.5} = \frac{8.1}{0.5}$

یا $x = 16.2$

پڑتال: دی گئی مساوات میں $x = 16.2$ درج کرنے سے

$$4.2 \times 16.2 + 1.5 = 3.7 \times 16.2 + 9.6$$

یا $68.04 + 1.5 = 59.94 + 9.6$

یا $69.54 = 69.54$

کیونکہ دی ہوئی مساوات کو $x = 16.2$ پورا کرتی ہے

پس حل سیٹ $\{16.2\}$ ہے

مشق 6.1

مندرجہ ذیل کا حل سیٹ معلوم کیجیے اور پڑتال بھی کیجیے۔

1. $4x - 5 = 1$
2. $21x + 19 = 40$
3. $11y + 10 = 32$
4. $40y - 50 = -100$
5. $9z + 59 = 5$
6. $2z - 18 = 6z + 10$

مندرجہ ذیل میں سے t کی قیمت معلوم کیجیے۔

7. $\frac{4t + 7}{11} = 12$
8. $\frac{6t - 5}{5} = 7$
9. $\frac{5t + 59}{9} = 13$
10. $\frac{9t + 13}{8} = 9$
11. $\frac{3 - 2t}{4} + \frac{4t - 5}{6} = 1$
12. $5\left(\frac{t + 3}{3}\right) - 4\left(\frac{t + 5}{5}\right) = 6$

مندرجہ ذیل کو حل کیجیے۔

13. $\frac{4x+3}{3} + 3 = \frac{3x+4}{4}$

14. $\frac{5x+3}{5} - \frac{x}{3} = \frac{2x-3}{2}$

15. $\frac{9x+2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{x+3}{20}$

16. $5(x+1) - (9x+10) = 17$

17. $5(2x-3) - (9x+10) = 19$

18. $5.3x - 5.6 = 7.4x + 1.2$

19. $3.12x + 0.2x = 7.11 - 0.3x$

20. $\frac{7.2x-36}{0.2} = \frac{36\ x+2.7}{0.3}$

6.3 یک درجی مساوات پر عبارتی سوالات

عبارتی سوالات کو مساوات کے ذریعے حل کیا جاسکتا ہے۔ جس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1۔ دو اعداد کا مجموعہ 32 ہے جبکہ ایک عدد 18 ہے دوسرا معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ دوسرا عدد x ہے۔

سوال میں دی گئی شرط کے مطابق

$$18 + x = 32$$

یا $-18 + 18 + x = -18 + 32$

یا $x = 14$

پس دوسرا عدد 14 ہے۔

پڑتال: $18 + 14 = 32$

مثال 2۔ دو متواتر اعداد کا مجموعہ 29 ہے اعداد بتائیے۔

حل: فرض کیا کہ دو متواتر اعداد x اور x + 1 ہیں۔

سوال میں دی گئی شرط کے مطابق

$$x + (x+1) = 29$$

$$x + x + 1 = 29$$ یا
$$2x + 1 = 29$$ یا
$$2x + 1 - 1 = 29 - 1$$ یا
$$2x = 28$$ یا
$$\frac{2x}{2} = \frac{28}{2}$$ یا
$$\frac{\cancel{2}^{1}x}{\cancel{2}_{1}} = \frac{\cancel{28}^{14}}{\cancel{2}_{1}}$$ یا
$$x = 14$$

ایک عدد 14 ہے تو

دوسرا عدد $= x + 1$

$= 14 + 1$

$= 15$

پس مطلوبہ اعداد 14 اور 15 ہیں۔

مثال 3- ایک عدد کے تین گنا میں 5 جمع کرنے سے 20 آتا ہے تو نامعلوم عدد معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ نامعلوم عدد x ہے۔

سوال میں دی گئی شرط کے مطابق

$$3x + 5 = 20$$
یا
$$3x + 5 - 5 = 20 - 5$$
یا
$$3x = 15$$
یا
$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$
یا
$$\frac{3x}{3} = \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{3}_{1}}$$
یا
$$x = 5$$

پس نامعلوم عدد 5 ہے۔

پڑتال: $5 \times 3 + 5 = 15 + 5 = 20$

مثال 4۔

باپ کی عمر بیٹے کی عمر کا تین گنا ہے۔ لیکن 16 سال بعد باپ کی عمر بیٹے کی عمر کا دگنا رہ جائے گی۔ دونوں کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

حل :

فرض کیا کہ بیٹے کی موجودہ عمر x سال ہے

اس لیے باپ کی موجودہ عمر $3x$ سال ہوگی۔

16 سال بعد بیٹے کی عمر $(x + 16)$ سال ہوگی۔

اور 16 سال بعد باپ کی عمر $(3x + 16)$ سال ہوگی۔

اب سوال میں دی گئی شرط کے مطابق

$$3x + 16 = 2(x + 16)$$

یا $$3x + 16 = 2x + 32$$

یا $$3x + 16 - 16 = 2x + 32 - 16$$

یا $$3x = 2x + 16$$

یا $$-2x + 3x = 2x - 2x + 16$$

یا $$x = 16$$

یعنی بیٹے کی موجودہ عمر 16 سال ہے اور

باپ کی عمر $= 3x$

$= 3 \times 16$

$= 48$ سال

پس باپ اور بیٹے کی موجودہ عمریں بالترتیب 48 سال اور 16 ہیں۔

پڑتال :

$$3x = 3 \times 16 = 48$$

$$x + 16 = 16 + 16 = 32$$

$$3x + 16 = 3 \times 16 + 16 = 48 + 16 = 64$$

تو $64 = 2 \times 32$

مثال5۔

عرفان اور کامران نے ایک ہی عدد سوچا۔ عرفان اس کو 5 سے اور کامران 8 سے ضرب دیتا ہے۔ عرفان حاصل ضرب میں 7 جمع کرتا ہے اور کامران حاصل ضرب سے 14 نفی کرتا ہے۔ اگر اس طرح دونوں ایک ہی نتیجہ پر پہنچتے ہوں تو عدد معلوم کیجیے۔

حل:

فرض کیا کہ نامعلوم عدد x ہے

سوال میں دی گئی شرط کے مطابق

$$5x + 7 = 8x - 14$$

یا $-5x + 5x + 7 = -5x + 8x - 14$

یا $7 = 3x - 14$

یا $7 + 14 = 3x - 14 + 14$

یا $21 = 3x$

یا $3x = 21$

یا $\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$

یا $\frac{\cancel{3}^{1}x}{_{1}\cancel{3}} = \frac{\cancel{21}^{7}}{\cancel{3}_{1}}$

یا $x = 7$

پس مطلوبہ عدد 7 ہے۔

پڑتال:

$$5x + 7 = 8x - 14$$

$$5 \times 7 + 7 = 8 \times 7 - 14$$

$$35 + 7 = 56 - 14$$

$$42 = 42$$

مثال6۔

ایک ٹائپسٹ کی کام کی رفتار، دوسرے ٹائپسٹ کی کام کرنے کی رفتار کا ایک تہائی ہے۔ اگران کی مجموعی کام کرنے کی رفتار 160 الفاظ فی منٹ ہو تو ان کی الگ الگ کام کرنے کی رفتار کیا ہوگی؟

حل: فرض کیا کہ پہلے ٹائپسٹ کی کام کرنے کی رفتار x ہے

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$x + \frac{1}{3}x = 160$$

یا $$\frac{3x + x}{3} = 160$$

یا $$\frac{4x}{3} = 160$$

یا $$4x = 160 \times 3$$

یا $$4x = 480$$

یا $$x = \frac{480}{4}$$

یا $$x = 120$$

پس پہلے ٹائپسٹ کی کام کرنے کی رفتار 120 الفاظ فی منٹ

اور دوسرے ٹائپسٹ کی کام کرنے کی رفتار $\frac{1}{3} \times 120$ یعنی 40 الفاظ فی منٹ ہے۔

مشق 6.2

1۔ دو اعداد کا مجموعہ 72 ہے۔ جبکہ ایک عدد 42 ہے۔ دوسرا عدد معلوم کیجیے۔

2۔ دو متواتر اعداد کا مجموعہ 101 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

3۔ دو متواتر طاق اعداد کا مجموعہ 64 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

4۔ کسی عدد کے چار گنا میں 9 جمع کرنے سے جواب 37 آتا ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

5۔ دو متواتر جفت اعداد کا مجموعہ 66 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

6۔ کسی عدد کے تین چوتھائی میں 5 جمع کرنے سے جواب 26 آتا ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

7۔ باپ کی عمر بیٹے کی عمر کا تین گنا ہے۔ اگر باپ کی عمر 45 سال ہو تو بیٹے کی عمر معلوم کیجیے۔

8۔ چھ سال پہلے باپ کی عمر بیٹے کی عمر کا 6 گنا تھی۔ لیکن 8 سال بعد صرف دو گنا رہ جائے گی۔ دونوں کی موجودہ عمریں بتائیے۔

9۔ دو طالب علم ایک ہی عدد سوچتے ہیں۔ پہلا طالب علم اس عدد کو 4 سے دوسرا 7 سے ضرب دیتا ہے۔ پہلا طالب علم اس عدد کے حاصل ضرب میں 12 جمع کرتا ہے۔ دوسرا حاصل ضرب میں سے 9 نفی کرتا ہے۔ اگر اس طرح دونوں ایک ہی نتیجے پر پہنچتے ہیں تو وہ عدد بتائیے۔

10۔ تین سال پہلے باپ کی عمر بیٹے کی عمر سے 3 گنا تھی۔ تو بیٹے کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔ جبکہ باپ کی موجودہ عمر 30 سال ہے۔

11۔ دو اعداد کا حاصل ضرب 256 ہے۔ اگر ایک عدد 16 ہو تو دوسرا عدد معلوم کیجیے۔

12۔ باپ کی عمر بیٹے کی عمر کا تین گنا ہے۔ اگر ان کی عمروں کا مجموعہ 72 سال ہو۔ تو دونوں کی عمریں معلوم کیجیے۔

13۔ آٹھویں جماعت کے دو طالب علموں میں 1800 روپے کا وظیفہ اس طرح تقسیم کیا گیا کہ ایک طالب علم کو دوسرے کا دوگنا ملا۔ تو بتائیے کہ دونوں طالب علموں کو کتنا کتنا وظیفہ ملا؟

14۔ کسی عدد کا تین گنا، عدد سے 60 زیادہ ہے۔ عدد بتائیے۔

15۔ دو متواتر جفت اعداد کا مجموعہ 98 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

16۔ ایک شخص کے پاس کچھ رقم تھی جو اس نے رفاہ عامہ کے کاموں میں اس طرح خرچ کی کہ رقم کا $\frac{1}{4}$ حصہ ایک ہسپتال کو، $\frac{1}{5}$ حصہ ایک اسکول کو اور $\frac{1}{3}$ حصہ یتیم خانے کو دیا۔ باقی رقم 13390 روپے ایک مسجد کو دیے۔ بتائیے اُس نے کل کتنی رقم خرچ کی؟

17۔ ایک مستطیلی علاقے کا احاطہ 120 میٹر ہے۔ اس کی چوڑائی لمبائی سے 15 میٹر کم ہے۔ لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

18۔ ایک مستطیلی علاقے کا احاطہ اس کی چوڑائی کا چار گنا ہے۔ جبکہ اس کی لمبائی 20 میٹر ہے۔ تو اس کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

19۔ ایک کسر کا مخرج، شمار کنندہ سے بقدر 2 بڑا ہے۔ اگر دونوں میں 5 جمع کیا جائے تو کسر $\frac{20}{21}$ کے مترادف ہو جاتی ہے۔ کسر معلوم کیجیے۔

20۔ ایک عدد ایسا ہے کہ اس کے دو گنے اور 5 کا مجموعہ وہی ہے جو اُس عدد اور 17 کا مجموعہ ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔

21 ایک زمیندار ناقص کھاد استعمال کرتا ہے۔ دوسرا زمیندار اچھی کھاد استعمال کرتا ہے پہلے کی نسبت دُوسرا زمیندار تین گنا زیادہ پیداوار حاصل کرتا ہے اگر دونوں کی مجموعی پیداوار 3200 بوری سالانہ ہو تو دونوں زمینداروں کی الگ الگ پیداوار معلوم کریں؟

22 ایک سروے کے مطابق پاکستان کی آبادی کا 41 فیصد 15 سال سے کم عمر کے بچوں پر مشتمل ہے اگر پاکستان کی کُل آبادی 130 ملین ہو تو 15 سال سے کم عمر والے بچوں کی تعداد معلوم کیجیئے۔

23 پاکستان کی کُل آبادی 130 ملین ہے اس میں 20 تا 65 سال کی عمر والے افراد 74.1 ملین ہوں تو بتائیں کہ وہ کُل آبادی کا کتنے فیصد ہیں؟

ساتواں باب

نسبت اور تناسب

7.1 نسبت

ہم ساتویں جماعت میں نسبت کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ یہاں اعادہ کے لیے ایک مثال بیان کی جاتی ہے۔

زاہد کی عمر 12 سال اور اس کے بڑے بھائی عامر کی عمر 18 سال ہے۔ ان کی عمروں کا مقابلہ کرنے کا ایک طریقہ تو یہ ہے کہ ان کی عمروں کے فرق کو مدنظر رکھتے ہوئے ہم کہیں کہ زاہد عامر سے 6 سال چھوٹا ہے۔ اس طرح سے مقابلہ کرنے کو موازنہ بلحاظ تفریق کہتے ہیں۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ہم کہیں کہ زاہد کی عمر عامر کی عمر کا $\frac{12}{18}$ ہے۔ اس طرح سے مقابلہ کرنے کو موازنہ بلحاظ تقسیم یا کسر کہتے ہیں۔ اس طرح کے تقابل کو **نسبت** کہتے ہیں۔ اور اس کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ زاہد اور عامر کی عمروں میں 12 اور 18 کی نسبت ہے۔ اور اسے علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں:

$$12 : 18$$

اسے یوں پڑھا جاتا ہے " 12 نسبت 18" یہاں علامت " : " نسبت کو ظاہر کرتی ہے۔ یہ علامت دراصل تقسیم کی علامت " ÷ " کی ہی قدرے تبدیل شدہ شکل ہے۔ اسے یوں بھی لکھا جا سکتا ہے:

$$12 : 18 = \frac{12}{18}$$

یا $12 : 18 = 12 \div 18$

اس نسبت کو ظاہر کرنے کے لیے جو اعداد 12 اور 18 استعمال ہوئے ہیں۔ انہیں نسبت کے **ارکان** کہتے ہیں۔

نسبت کے پہلے رکن کو **مقدم** (Antecedent) اور دوسرے کو **مؤخر** (Consequent) کہا جاتا ہے۔

اس مثال میں موجود نسبت 18 : 12 میں 12 مقدم اور 18 مؤخر ہے۔

نوٹ: 18 : 12 کو 12 : 18 نہیں لکھ سکتے کیونکہ یہ دو مختلف نسبتیں ہیں۔

7.2 نسبت کی مختصر ترین یا معیاری صورت

جب کسی نسبت کے ارکان صحیح اعداد ہوں اور ان کا عاد اعظم '1' ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نسبت

"مختصر ترین" یا "معیاری صورت" میں ہے۔ چونکہ نسبت کو کسر کی صورت میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے اسے معیاری صورت میں تحویل کرنے کے لیے کسر یعنی اس کے دونوں ارکان کو ایک ہی غیر صفر عدد سے ضرب دے سکتے ہیں یا ایک ہی غیر صفر عدد پر تقسیم کر سکتے ہیں۔ اس کی دو صورتیں ہوتی ہیں۔

1. اگر دی ہوئی نسبت کے ارکان صحیح اعداد ہوں مگر باہم مفرد نہ ہوں۔ تو انہیں ان کے عاد اعظم پر تقسیم کرنے سے نسبت معیاری صورت میں تحویل ہو جاتی ہے۔ مثلاً

(i) $12 : 18 = 2 : 3$ (ارکان کو ان کے عاد اعظم 6 پر تقسیم کرنے سے)

(ii) $25 : 50 = 1 : 2$ (ارکان کو ان کے عاد اعظم 25 پر تقسیم کرنے سے)

2. اگر نسبت کے ارکان کسر میں ہوں تو انہیں ان کے مخرج کے ذو اضعاف اقل سے ضرب دینے سے نسبت کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے۔ مثلاً

(i) $\frac{3}{5} : \frac{5}{7} = 21 : 25$ (مخارج کے ذو اضعاف اقل 35 سے ضرب کرنے سے)

(ii) $\frac{13}{14} : \frac{2}{9} = 117 : 28$ (مخارج کے ذو اضعاف اقل 126 سے ضرب کرنے سے)

نسبت معلوم کرنے سے پیشتر دی ہوئی مقداروں کو ایک ہی اکائی میں تحویل کرنا لازمی ہوتا ہے۔

مثال 1۔ ایک درخت کی اونچائی 4 میٹر اور 5 ڈیسی میٹر ہے۔ جبکہ اس کے برابر لگے ہوئے دوسرے درخت کی اونچائی 5 میٹر اور 4 ڈیسی میٹر ہے۔ تو ان کی اونچائیوں میں نسبت معلوم کیجیے۔

حل: پہلے درخت کی اونچائی 4 میٹر اور 5 ڈیسی میٹر ہے۔

یعنی 45 ڈیسی میٹر

(کیونکہ 10 ڈیسی میٹر = ایک میٹر)

دوسرے درخت کی اونچائی 5 میٹر اور 4 ڈیسی میٹر ہے۔

یعنی 54 ڈیسی میٹر

اس لیے اونچائیوں میں نسبت ہوئی

$45:54$

اب ان کے عاد اعظم 9 پر تقسیم کرنے سے

اونچائیوں میں نسبت = $5 : 6$

پس مطلوبہ نسبت = $5 : 6$

مثال 2۔ انجم کو انگریزی اور ریاضی کے پرچوں میں بالترتیب 8 اور 10 سوالات حل کرنا تھے۔ اس نے انگریزی میں 5 اور ریاضی میں 7 سوالات درست کیے۔ بتائیے انجم کی کارگردگی کس مضمون میں بہتر رہی۔

حل: انجم کی انگریزی میں کارکردگی ہے

$$5 : 8 = \frac{5}{8}$$

انجم کی ریاضی میں کارکردگی ہے

$$7 : 10 = \frac{7}{10}$$

اب ہم بہتر کارکردگی معلوم کرنے کے لیے یہ دیکھتے ہیں کہ بڑی نسبت کون سی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ دو کسروں کا مقابلہ کرنے کے لیے پہلے انہیں ہم مخرج بنایا جاتا ہے۔

اس لیے 8 اور 10 کے ذو اضعاف اقل 40 سے دونوں نسبتوں کو ضرب اور تقسیم کرنے سے

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{8} \times \frac{40}{40} = \frac{25}{40}$$

اور

$$\frac{7}{10} = \frac{7}{10} \times \frac{40}{40} = \frac{28}{40}$$

اب چونکہ

$$\frac{28}{40} > \frac{25}{40}$$

پس معلوم ہوا کہ دوسری نسبت پہلی نسبت سے بڑی ہے۔

لہذا انجم کی کارکردگی انگریزی کے مقابلے میں ریاضی میں بہتر رہی۔

7.3 مسلسل نسبت

روزمرہ زندگی میں بعض اوقات دو سے زیادہ مقداروں کا باہم موازنہ کرنے کے لیے مسلسل نسبت کی ضرورت پڑتی ہے۔ اگر ہم تین نسبتیں 3 : 2، 4 : 3 اور 4 : 2 لیں تو ان میں سے کسی دو کو ملا کر لکھنے سے 4 : 3 : 2 حاصل ہوتی ہے۔ اور اسے 2، 3 اور 4 میں **مسلسل نسبت** کہتے ہیں۔

اس کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

فرض کیجیے کہ $a : b = 2 : 3$

اور $b : c = 3 : 4$

ایسی دو نسبتوں میں ایک رکن مشترک ہوتا ہے یا مشترک کرنا پڑتا ہے۔ اس مثال میں رکن b مشترک ہے۔

$a : b : c$

$2 : 3$

$3 : 4$

$2 : 3 : 4$

پس $a : b : c = 2 : 3 : 4$

مثال 1۔ اگر $b : c = 7 : 5$ اور $a : b = 5 : 4$ تو $a : b : c$ معلوم کیجیے۔

حل:

$a : b = 5 : 4$

$b : c = 7 : 5$

یہاں دونوں نسبتوں میں b کا متناظرہ ایک ہی رکن نہیں ہے۔ لہٰذا دونوں نسبتوں میں b کے متناظرہ ایک ہی رکن حاصل کرنے کے لیے ہم پہلی نسبت کو 7 سے اور دوسری نسبت کو 4 سے ضرب دیتے ہیں۔

$a : b = 7 (5 : 4) = 35 : 28$

اور $b : c = 4 (7 : 5) = 28 : 20$

پس $a : b : c = 35 : 28 : 20$

اس عمل کو یوں بھی کر سکتے ہیں۔

$a : b : c$

$5 : 4$

$7 : 5$

$5 \times 7 : 4 \times 7 : 4 \times 5$

یعنی $35 : 28 : 20$

پس $a : b : c = 35 : 28 : 20$

مثال 2۔ اگر $b : c = 12 : 7$ اور $a : b = 5 : 9$ تو $a : b : c$ معلوم کیجیے۔

حل:

یہاں b کے متناظرہ ارکان 9 اور 12 باہم مفرد نہیں ہیں۔

اور ان کا ذواضعاف اقل 36 ہے تو

$36 \div 9 = 4$

$36 \div 12 = 3$

اب $a : b = 4\,(5 : 9) = 20 : 36$

اور $b : c = 3\,(12 : 7) = 36 : 21$

پس $a : b : c = 20 : 36 : 21$

دوسرے طریقے سے

$$a : b : c$$

$$\begin{array}{ccccc} 5 & : & 9 & & \\ & & 12 & : & 7 \\ \hline 5 \times 12 & : & 9 \times 12 & : & 9 \times 7 \end{array}$$

یا $20 \times 3 : 36 \times 3 : 21 \times 3$

3 مشترک جزو ہے

اس لیے $20 : 36 : 21$

پس $a : b : c = 20 : 36 : 21$

مثال 3۔ اگر $a : c = 1 : 2$ اور $a : b = 4 : 5$ تو $a : b : c$ معلوم کیجیے۔

حل: اس مثال میں a دونوں نسبتوں میں مشترک رکن ہے اور اس کے متناظرہ ارکان 4 اور 1 ہیں۔ جن کا ذو اضعاف اقل 4 ہے۔ تو

$a : b = 1\,(4 : 5) = 4 : 5$

اور $a : c = 4\,(1 : 2) = 4 : 8$

پس $a : b : c = 4 : 5 : 8$

دوسرے طریقے سے

$$a : b : c$$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & : & 5 & & \\ 1 & & & : & 2 \\ \hline 4 & : & 5 & : & 8 \end{array}$$

پس $a : b : c = 4 : 5 : 8$

مثال 4۔ اگر $a : b = 4 : 7, b : c = 5 : 8, c : d = 6 : 11$

تو $a : b : c : d$ معلوم کیجیے۔

حل: پہلے ہم $a : b : c$ معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{ccc} a & : b & : c \\ 4 & : 7 & \\ & 5 & : 8 \\ \hline 20 & : 35 & : 56 \end{array}$$

اب

$$\begin{array}{cccc} a & : b & : c & : d \\ 20 & : 35 & : 56 & \\ & & 6 & : 11 \\ \hline 120 & : 210 & : 336 & : 616 \end{array}$$

یا $60 \times 2 : 105 \times 2 : 168 \times 2 : 308 \times 2$

یا $60 : 105 : 168 : 308$

پس $a : b : c : d = 60 : 105 : 168 : 308$

مشق 7.1

1۔ مندرجہ ذیل مقداروں میں نسبت معلوم کیجیے:

(i) 3 میٹر، 6 میٹر
(ii) ایک روپیہ، 3 روپے
(iii) 12 میٹر، 20 میٹر
(iv) 2 روپے، 5 روپے
(v) 50 لٹر، 125 لٹر
(vi) 75 گرام، 125 گرام
(vii) 175 لٹر، 225 لٹر
(viii) 90 گرام، 120 گرام

2۔ مندرجہ ذیل مقداروں میں نسبت کو معیاری صورت میں لکھیے:

(i) 25 پیسے، ایک روپیہ
(ii) 70 پیسے، 3 روپے
(iii) 55 ملی لیٹر، 5 لیٹر
(iv) 75 ملی لیٹر، 10 لیٹر
(v) 65 میٹر، 4 کلومیٹر
(vi) 80 میٹر، 2 کلومیٹر اور 10 میٹر

(vii) 15 ملی گرام، 20 ڈیسی گرام (viii) 40 کلوگرام ، $2\frac{1}{2}$ کوئنٹل

(ix) 5 میٹر فی سیکنڈ ، 50 کلومیٹر فی گھنٹہ (x) 6 میٹر فی سیکنڈ، 60 کلومیٹر فی گھنٹہ

3- $a : b : c$ معلوم کیجیے جبکہ

(i) $a : b = 6 : 7 \quad b : c = 7 : 9$

(ii) $a : b = 4 : 7, \quad b : c = 5 : 9$

(iii) $a : b = 5 : 6 , \quad a : c = 5 : 7$

(iv) $a : b = 3 : 5 , \quad a : c = 2 : 3$

(v) $a : b = 11 : 16 , \quad b : c = 24 : 35$

(vi) $a : b = 12 : 13 , \quad a : c = 18 : 23$

(vii) $a : b = 4 : 11 , \quad b : c = 8 : 5$

(viii) $a : c = 2 : 3 , \quad b : c = 4 : 5$

4- $a : b : c : d$ معلوم کیجیے جبکہ

(i) $a : b = 5 : 6 , b : c = 8 : 15 , \ c : d = 20 : 27$

(ii) $a : b = 6 : 11 , b : c = 5 : 8 , c : d = 4 : 7$

(iii) $a : b = 5 : 6, \ b : c = 6 : 13 , \ c : d = 13 : 8$

7.4 تناسب

ہم ساتویں جماعت میں پڑھ چکے ہیں کہ دو نسبتوں کی برابری کو ظاہر کرنے والا فقرہ تناسب کہلاتا ہے۔

مثال۔ اگر $x : 5 = 16 : 20$

تو x کی قیمت کیا ہوگی۔

حل:

$$x : 5 = 16 : 20$$

یا $$\frac{x}{5} = \frac{16}{20}$$

یا $$5 \times \frac{x}{5} = 5 \times \frac{16}{20}$$

یا $$\cancel{5} \times \frac{x}{\cancel{5}} = \cancel{5} \times \frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{20}_{\cancel{4}}}$$

یا $$x = 4$$

پس دی ہوئی نسبتوں میں $x = 4$ درج کرنے سے نسبتیں تناسب میں آجاتی ہیں۔ اور اس میں موجود چاروں مقداریں متناسب مقداریں کہلاتی ہیں۔

یعنی ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر $a : b = c : d$

تو یہ مساوات ایک تناسب ہے اور اس کی مقداریں a ، b ، c اور d متناسب مقداریں ہیں۔ اور اس میں a اور d طرفین اور b اور c وسطین کہلاتے ہیں۔ تناسب کو عام طور پر یوں لکھا جاتا ہے

$$a : b :: c : d$$

اسے یوں پڑھا جاتا ہے "a کو b سے وہی نسبت ہے جو c کو d سے ہے" یا "a نسبت b برابر ہے c نسبت d کے" نسبتوں کی برابری کی علامت" :: "یہ اشارہ کرتی ہے کہ ہمارا سروکار دو نسبتوں کی برابری سے ہے۔

تناسب کی اہم خصوصیات

1. کسی تناسب میں وسطین کو بدلا جاسکتا ہے۔

یعنی $a : b :: c : d$ کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$a : c :: b : d$$

ثبوت ، $a : b :: c : d$

یا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

طرفین کو $\frac{b}{c}$ سے ضرب کرنے پر

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{c}$$

یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

یا $a : c = b : d$

2. کسی بھی تناسب میں طرفین کا حاصل ضرب، وسطین کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

یعنی اگر $a : b :: c : d$

تو $ad = bc$

ثبوت : $a : b :: c : d$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ یا

طرفین کو bd سے ضرب کرنے پر

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd$$

یا $ad = cb$

یا $ad = bc$

یعنی **وسطین کا حاصل ضرب = طرفین کا حاصل ضرب**

نوٹ : تناسب کے سوالات حل کرنے کے لیے اکثر اسی خاصیت کو استعمال کیا جاتا ہے۔ اور حوالے کے لیے ہم اس خاصیت کو "خاصیت تناسب" کہیں گے۔

7.5 تناسب کی قسمیں

تناسب کی دو اقسام ہیں :

1- راست تناسب (Direct Proportion)

2- معکوس تناسب (Inverse Proportion)

1- راست تناسب

دو مقداروں کا ایک دوسرے سے ایسا تعلق، جب ایک مقدار میں اضافہ (یا کمی)، ہو تو دوسری مقدار میں بھی اُسی قدر اضافہ (یا کمی)، ہو، راست تناسب کہلاتا ہے۔

راست تناسب کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

(i) جتنی زیادہ رقم ہوگی اُسی قدر زیادہ اشیاء بھی خریدی جا سکیں گی۔
یا جتنی کم رقم ہوگی اُسی قدر کم اشیاء خریدی جا سکیں گی۔

(ii) گاڑی کی رفتار جتنی زیادہ ہوگی۔ طے کردہ فاصلہ اتنا ہی زیادہ ہوگا یا رفتار جتنی کم ہوگی طے کردہ فاصلہ بھی اتنا ہی کم ہوگا۔

(iii) جتنے زیادہ مزدور کام پر لگائے جائیں گے کام اتنا ہی زیادہ ہوگا یا جتنے کم مزدور کام پر لگائے جائیں گے کام اتنا ہی کم ہوگا۔

(iv) مشین کی کام کرنے کی رفتار جتنی زیادہ ہوگی۔ کام کی مقدار اتنی زیادہ ہوگی۔

مثال 1۔ مساوی قیمت کی چار کتابوں کی کل قیمت 125 روپے ہو تو ایسی ہی 16 کتابوں کی کیا قیمت ہوگی؟

حل:

کتابوں کی قیمت (روپوں میں)	کتابوں کی تعداد
125	4
x	16

(راست)

$$4 : 16 :: 125 : x$$

یا $\frac{4}{16} = \frac{125}{x}$

تناسب کی خاصیت استعمال کرنے سے

$$4x = 125 \times 16$$

یا $x = \frac{125 \times 16}{4}$

$= 125 \times 4$

یا $x = 500$

پس 16 کتابوں کی قیمت 500 روپے ہے۔

مثال 2۔ ایک ریل کار نے 125 کلو میٹر کا فاصلہ $2\frac{1}{2}$ گھنٹے میں طے کیا۔ تو ایک گھنٹے میں کتنا فاصلہ طے کرے گی۔

حل:

فاصلہ (کلومیٹر میں)	وقت (گھنٹوں میں)
125	$2\frac{1}{2}$
x	1

(راست)

$$2\frac{1}{2} : 1 :: 125 : x$$

یا $\frac{2\frac{1}{2}}{1} = \frac{125}{x}$

یا $\frac{5}{2} = \frac{125}{x}$

یا $5x = 125 \times 2$

یا $x = \frac{125 \times 2}{5}$

یا $x = 25 \times 2$

یا $x = 50$

پس ریل کار ایک گھنٹے میں 50 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرے گی۔

2۔ معکوس تناسب

راست تناسب کا بالعکس عمل معکوس تناسب کہلاتا ہے۔ اسے یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ "دو مقداروں کا ایک دوسرے سے ایسا تعلق، جب ایک مقدار میں اضافہ (یا کمی) ہو تو دوسری مقدار میں اُتنی ہی کمی (یا اضافہ) ہو، معکوس تناسب کہلاتا ہے۔"

معکوس تناسب کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

(i) جتنی زیادہ رفتار ہوگی اتنا ہی کم وقت لگے گا یا جتنی کم رفتار ہوگی اتنا ہی زیادہ وقت لگے گا۔

(ii) جتنے زیادہ آدمی کام پر لگائے جائیں گے کام اتنا ہی کم وقت میں ہوگا یا جتنے کم آدمی کام پر لگائے جائیں گے کام اتنا ہی زیادہ وقت میں ہوگا۔

(iii) جتنے زیادہ گھنٹے کام روزانہ ہوگا اتنے ہی کم دن لگیں گے یا جتنے کم گھنٹے روزانہ کام ہوگا۔ اتنے ہی زیادہ دن لگیں گے۔

مثال 1۔ ایک آدمی اپنی کار 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے چلاتے ہوئے اپنے مطلوبہ مقام پر 4 گھنٹوں میں پہنچتا ہے۔ اگر اس کو اپنے مطلوبہ مقام پر 3 گھنٹوں میں پہنچنا ہو تو کار کی رفتار کیا ہونی چاہیے۔

حل:

رفتار (کلومیٹر فی گھنٹہ)	وقت (گھنٹوں میں)
60	4
x	3

(معکوس)

اس لیے $3 : 4 :: 60 : x$

تو $3x = 4 \times 60$

یا $x = \frac{4 \times 60}{3}$

یا $x = 4 \times 20$

یا $x = 80$

پس کار کی رفتار 80 کلومیٹر فی گھنٹہ ہوگی، تاکہ وہ مطلوبہ فاصلہ 3 گھنٹوں میں طے کر سکے۔

مثال 2۔

18 مزدور ایک کام کو 6 دن میں ختم کر لیتے ہیں۔ تو بتائیے کہ اس کام کو 9 دنوں میں مکمل کرنے کے لیے کتنے مزدور کم کر دیے جائیں۔

حل:

مزدور	دن
18	6
x	9

(معکوس)

اس لیے

$$9 : 6 :: 18 : x$$

یا $\frac{9}{6} = \frac{18}{x}$

یا $9x = 18 \times 6$

یا $x = \frac{18 \times 6}{9}$

یا $x = 2 \times 6$

یا $x = 12$

موجودہ مزدور = 18

مطلوبہ تعداد مزدوروں کی = $18 - 12 = 6$

لہٰذا 9 دنوں میں کام مکمل کرنے کے لیے 6 مزدور کم کر دیئے جائیں گے۔

مثال 3۔ 12 مزدور ایک کام کو آٹھ گھنٹوں میں مکمل کر سکتے ہیں۔ تو بتائیے کہ 16 مزدور اُسی کام کو کتنے گھنٹوں میں مکمل کریں گے۔

حل:

مزدور	گھنٹے
12	8
16	x
(معکوس)	

اس لیے $16 : 12 :: 8 : x$

یا $\frac{16}{12} = \frac{8}{x}$

یا $16x = 8 \times 12$

یا $x = \frac{8 \times 12}{16}$

یا $x = \frac{\overset{1}{\cancel{8}} \times \cancel{12}^{6}}{\cancel{16}_{\cancel{2}\,1}}$

تو $x = 6$

پس 16 مزدور 6 گھنٹوں میں کام مکمل کریں گے۔

مثال 4۔ ایک ماڈل بنگلے کو تیار کرنے میں 21 مزدور 38 دن لگاتے ہیں۔ لیکن 6 دن بعد 5 مزدور رخصت پر چلے گئے۔ تو بتائیے کہ اس ماڈل بنگلے کو مکمل کرنے میں کتنے دن زیادہ لگیں گے۔

حل: کیونکہ ماڈل بنگلے کو تیار کرنے میں 21 مزدور 38 دن لیتے ہیں۔ لیکن 6 دن کے بعد 5 مزدور کم ہو جاتے ہیں۔ یعنی اب 16 مزدور بچے ہیں اور دن 32 ہیں۔

اس لیے

مزدور	دن
21	32
16 (معکوس)	x

یا $16 : 21 :: 32 : x$

یا $\frac{16}{21} = \frac{32}{x}$

یا $16x = 32 \times 21$

یا $x = \frac{32 \times 21}{16}$

یا $x = \frac{\overset{2}{\cancel{32}} \times 21}{\cancel{16}_1}$

یا $x = 2 \times 21$

یا $x = 42$

پس ماڈل بنگلے کو مکمل کرنے میں 4 دن زیادہ لگیں گے۔

مشق 7.2

1۔ ایک آدمی کی ایک ہفتے کی آمدنی 119 روپے ہے۔ تو بتائیے کہ ایک ماہ (30 دن) میں کتنی رقم کمائے گا۔

2۔ کسی جائیداد کے $\frac{4}{5}$ حصّے کی قیمت 50560 روپے ہو تو بتائیے کہ $\frac{1}{2}$ حصّے کی قیمت کیا ہوگی؟

3۔ عرفان کی آمدنی 900 روپے ہے۔ جس میں سے یہ ایک ماہ میں 250 روپے بچاتا ہے۔ جبکہ فیصل کی ماہانہ آمدنی 850 روپے ہے۔ اور اُس کا کل ماہانہ خرچ 700 روپے ہے۔ کل آمدنی کے لحاظ سے کس کا خرچ زیادہ ہے؟

4۔ اگر 16 مزدور ایک کام کو مل کر 30 دنوں میں ختم کر سکتے ہیں۔ تو 20 مزدور اُسی کام کو کتنے دنوں میں ختم کریں گے؟

5۔ کسی اسکول کی اقامت گاہ میں 150 طلبہ کے لیے 26 دن کی خوراک موجود ہے۔ اگر وہ خوراک 20 دنوں میں ہی ختم ہو جائے تو بتائیے کتنے طلبہ مزید کھانے میں شامل ہوئے؟

6۔ 12 مزدور ایک کام کو 18 دنوں میں ختم کر سکتے ہیں۔ تو بتائیے کہ 18 مزدور اُسی کام کو کتنے دنوں میں ختم کریں گے۔

7۔ 15 مزدور ایک کام کو 8 دن میں مکمل کر سکتے ہیں تو بتائیے اُس کام کو 5 دنوں میں مکمل کرتے

کے لیے کتنے اور مزدور کام پر لگائے جائیں۔

8- 30 کسان ایک کھیت کو 20 دنوں میں کاٹ سکتے ہیں۔ لیکن 5 دن بعد 5 کسان کام پر نہیں آئے۔ بتائیے کہ اُس کھیت کی کٹائی میں اب کتنے زیادہ دن لگیں گے؟

9- ایک کام کو مکمل کرنے کے لیے 14 آدمی درکار ہیں۔ اور یہ کام وہ 21 دنوں میں کر لیتے ہیں۔ لیکن 4 دن کے بعد 8 آدمی بیمار ہو جاتے ہیں۔ تو بتائیے اب یہ کام کتنے زیادہ دنوں میں ختم ہوگا؟

10- 1994 میں جدید آباد شہر کی آبادی 11,00,000 تھی۔ اگر پانی کی ضرورت دس گیلن فی کس روزانہ ہو اور 1994 میں 11 ملین گیلن پانی روزانہ درکار ہو تو دو سال بعد پینے کا پانی کتنا درکار ہوگا۔ اگر آبادی 2.8 فیصد سالانہ کے حساب سے بڑھ رہی ہو۔

7.6 مرکب تناسب

روزمرہ کے معمولات میں ہمیں بعض اوقات ایسے مسائل درپیش آتے ہیں جن میں دو سے زیادہ تناسب موجود ہوتے ہیں۔ ایسا تناسب **مرکب تناسب** کہلاتا ہے۔ مرکب تناسب کے سوالات حل کرنے کے لیے مندرجہ ذیل نکات کو یاد رکھنا ضروری ہے۔

1- مطلوبہ مقدار کو x یا کسی اور متغیر سے ظاہر کیجیے۔

2- مطلوبہ مقدار کو انتہائی دائیں جانب یعنی آخر میں رکھنا چاہیے۔

3- ہر نسبت کی خصوصیات کا مطلوبہ مقدار نسبت سے موازنہ کرکے یہ یقین کریں کہ ان کا تعلق راست ہے یا معکوس۔

4- مطلوبہ نسبت سے موازنہ کرنے پر اگر ان کا تعلق راست ہو تو مقداروں کو اوپر سے نیچے کی جانب (یعنی اوپر والی پہلے اور نسبت کی علامت کے بعد دوسری مقدار) لکھی جاتی ہے۔ اور اگر تعلق معکوس ہو تو اس کے برعکس لکھا جاتا ہے۔

5- ضربی خصوصیات کو استعمال کرتے ہوئے مطلوبہ مقدار کو معلوم کیجیے۔

مندرجہ بالا نکات کو پیشِ نظر رکھتے ہوئے چند مثالیں حل کی جاتی ہیں۔ ہمیں امید ہے کہ طلباء کے لیے حل شدہ مثالیں معاون ثابت ہوں گی۔

مثال 1- ایک گاڑی 50 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر کرتے ہوئے اپنے مطلوبہ مقام پر پہنچنے میں $2\frac{1}{2}$ گھنٹے لیتی ہے۔ اگر گاڑی کی رفتار 15 کلومیٹر فی گھنٹہ بڑھا دی جائے تو یہ اپنے مطلوبہ مقام پر کتنے وقت میں پہنچے گی۔

حل:
کیونکہ گاڑی کی رفتار 50 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔
یعنی ایک گھنٹے میں طے کردہ فاصلہ 50 کلومیٹر ہے۔ اس لیے
(کم وقت، کم فاصلہ)

$2\frac{1}{2}$ گھنٹے میں طے کردہ فاصلہ $= 50 \times 2\frac{1}{2}$ کلومیٹر

$= 50 \times \frac{5}{2}$ کلومیٹر

$= 125$ کلومیٹر

اب

وقت (گھنٹوں میں)	فاصلہ (کلومیٹر)	رفتار (کلومیٹر فی گھنٹہ)
$2\frac{1}{2}$	125	50
x	125	65
	راست	معکوس

یعنی

$$\left.\begin{matrix}65 : 50 \\ 125 : 125\end{matrix}\right\} :: 2\frac{1}{2} : x$$

یا $65x \times 125 = 50 \times 125 \times 2\frac{1}{2}$

یا $x = \dfrac{50 \times 125 \times \frac{5}{2}}{65 \times 125}$

یا $x = \dfrac{\overset{5}{\cancel{10}}\ \cancel{50} \times \cancel{125} \times 5}{\underset{13}{\cancel{65}} \times \cancel{125} \times \cancel{2}}$

یا $x = \dfrac{25}{13}$

یا $x = 1\dfrac{12}{13}$

پس گاڑی اپنے مطلوبہ مقام پر $1\frac{12}{13}$ گھنٹے میں پہنچ جائے گی۔

مثال 2۔

ایک تعمیراتی کمپنی نے ایک کام کو ایک ماہ (30 دن) میں مکمل کرنے کا ٹھیکہ لیا اور اس کام پر 150 مزدور لگائے۔ 24 دنوں میں کام کا $\frac{4}{7}$ حصہ مکمل ہوا۔ بتائیے کتنے اور مزدور کام پر لگائے جائیں کہ کام وقت پر مکمل ہو جائے۔

حل:

مزدور	کام	دن
150	$\frac{4}{7}$	24
x	$\frac{3}{7}$	6
	راست	معکوس

یعنی

$$\left.\begin{matrix} 6 : 24 \\ 4/7 : 3/7 \end{matrix}\right\} : : 150 : x$$

یا $6x \times \frac{4}{7} = 24 \times \frac{3}{7} \times 150$

یا $x = \frac{24 \times 3 \times 150 \times 7}{7 \times 6 \times 4}$

یا $x = \frac{\overset{1}{\cancel{24}} \times 3 \times 150 \times \overset{1}{\cancel{7}}}{{}_1\cancel{7} \times \cancel{6}_1 \times \cancel{4}_1}$

یا $x = 450$

تو 6 دنوں کے لیے 450 مزدور ہونے چاہییں۔ لہٰذا

مزدور $(450 - 150) = 300$

پس 300 مزدور اور کام پر لگائے جائیں۔

مثال 3۔ 40 آدمیوں کا ایک ماہ کا خرچ 6000 روپے ہو تو 50 آدمیوں کا 25 دنوں کا خرچ کیا ہوگا؟

حل:

خرچ	دن	آدمی
6000	30	40
x	25	50
	(راست)	(راست)

یعنی

$$\left.\begin{matrix} 40 : 50 \\ 30 : 25 \end{matrix}\right\} : : 6000 : x$$

یا $40 \times 30\, x = 50 \times 25 \times 6000$

$$x = \frac{{}^{5}\cancel{50} \times 25 \times \cancel{6000}^{\cancel{200}\ 50}}{\cancel{40}_{\cancel{4}_1} \times \cancel{30}_1}$$ یا

$x = 5 \times 25 \times 50$ یا

$x = 6250$ یا

پس 50 آدمیوں کا 25 دنوں کا خرچ 6250 روپے ہوگا

مثال 4۔

اگر برق (بجلی) کے ایک ہی طاقت کے 25 قمقمے (بلب) روزانہ اوسطاً 5 گھنٹے روشن رہیں تو برق کا ماہانہ خرچ 150 روپے ہوتا ہے۔ بتائیے اسی طاقت کے 20 قمقمے 8 گھنٹے روزانہ روشن رہنے سے برق کا ماہانہ خرچ کیا ہوگا؟ (ایک ماہ = 30 دن)

حل:

خرچ (روپے میں)	قمقمے	گھنٹے	دن
150	25	5	30
x	20	8	30
	(راست)	(راست)	(راست)

یعنی

$$\left.\begin{matrix} 30 : 30 \\ 5 : 8 \\ 25 : 20 \end{matrix}\right\} :: 150 : x$$

$30 \times 5 \times 25\ x = 30 \times 8 \times 20 \times 150$ یا

$$x = \frac{30 \times 8 \times 20 \times 150}{30 \times 5 \times 25}$$ یا

$$x = \frac{{}^{1}\cancel{30} \times 8 \times \cancel{20}^{4} \times \cancel{150}^{6}}{\cancel{30}_1 \times \cancel{5}_1 \times \cancel{25}_1}$$ یا

$x = 8 \times 4 \times 6$ یا

$x = 192$ یا

پس برق کا ماہانہ 192 روپے ہوگا۔

مشق 7.3

1 - 20 آدمیوں کی چار ماہ کی کل تنخواہ 150000 روپے ہو تو بتائیے کہ 25 آدمیوں کی 8 ماہ کی تنخواہ کیا ہوگی۔

2 - ایک ٹھیکیدار نے ایک سڑک کو 20 دن میں مکمل کرنے کا ٹھیکہ لیا۔ اور 30 مزدور کام پر لگائے لیکن آٹھ دن بعد اس نے دیکھا کہ کام کا ایک تہائی حصّہ مکمل ہوا ہے تو بتائیے کہ کتنے مزدور اور کام پر لگائے جائیں کہ کام وقت پر مکمل ہو جائے۔

3 - ایک تعمیراتی کمپنی نے ایک کام کو 15 دنوں میں مکمل کرنے کا ٹھیکہ لیا اور دس آدمی کام پر لگائے۔ لیکن 5 دنوں میں کام کا صرف ایک چوتھائی حصّہ مکمل ہوا۔ تو بتائیے کہ کتنے مزید آدمی کام پر لگائے جائیں کہ کام بروقت مکمل ہو جائے۔

4 - ایک کام 8 دنوں میں مکمل کرنے کے لیے 30 آدمی کام پر لگائے گئے۔ لیکن 3 دن میں صرف ایک تہائی کام مکمل ہوا۔ تو بتائیے کہ مزید کتنے آدمی کام پر لگائے جائیں کہ کام وقت پر مکمل ہو جائے۔

5 - 6 مستری مِل کر 200 گز لمبا اور چالیس گز چوڑا فرش 16 دنوں میں بناتے ہیں۔ بتائیے 4 مستری 80 گز لمبا اور 50 گز چوڑا فرش کتنے دنوں میں بنائیں گے۔

6 - اگر 4 طلباء 5 دنوں میں 5 روپے خرچ کرتے ہیں تو بتائیے کہ 5 طلباء 8 دنوں میں کتنے روپے خرچ کریں گے۔

7 - اگر چھ آدمی روزانہ 8 گھنٹے کام کرکے ایک کام کو 36 دنوں میں پورا کرتے ہیں تو بتائیے کہ 12 آدمی روزانہ 9 گھنٹے کام کرکے اسی کام کو کتنے دن میں پورا کریں گے۔

8 - اگر برق کے ایک ہی طاقت کے 15 قمقمے روزانہ اوسطاً 6 گھنٹے روشن رہیں تو برق کا ماہانہ خرچ 135 روپے ہوتا ہے۔ بتائیے اِسی طاقت کے 24 قمقمے 8 گھنٹے روشن رہیں تو برق کا ماہانہ خرچ کتنا ہوگا۔

9 - ایک کارخانے میں ایک ہی جیسی 18 مشینیں روزانہ اوسطاً 18 گھنٹے چلنے سے برق کا ماہانہ خرچ 2700 روپے ہوتا ہے۔ تو بتائیے کہ اگر ایک ہی جیسی 27 مشینیں روزانہ اوسطاً 20 گھنٹے چلائی جائیں تو برق کا ماہانہ خرچ کتنا ہوگا۔

10 - 150 صفحات کی ایک کتاب کو 12 آدمی روزانہ 6 گھنٹے کام کرکے 25 دنوں میں مکمل کرتے ہیں۔ بتائیے کہ اِسی سائز کی ایک ایسی کتاب جس میں 200 صفحے ہوں کتنے دنوں میں مکمل کریں گے جبکہ 15 آدمی روزانہ 8 گھنٹے کام کرتے ہیں۔

11 - ایک زمیندار نے اپنے دو ہاریوں احمد اور سلیم کو 10,000 روپے فی کس امداد دی۔ احمد کے تین بچے ہیں جبکہ سلیم کے 10 بچے ہیں اگر امدادی رقم بچوں میں برابر تقسیم کی جائے تو احمد اور سلیم کے بچوں کو کتنی کتنی رقم ملے گی؟

آٹھواں باب

فی صد

8.1 نفع اور نقصان

ہم دکاندار سے روزمرہ استعمال کی جو اشیاء خریدتے ہیں۔ وہ اشیاء دکاندار بڑے دکاندار یا تھوک فروش سے خریدتے ہیں۔ اور تھوک فروش یہ اشیاء بڑے بڑے بیوپاریوں سے خریدتے ہیں۔ یعنی بڑے بڑے بیوپاری تھوک فروش سے نفع کماتے ہیں۔ تھوک فروش دکانداروں سے نفع کماتے ہیں۔ اور دکاندار عام صارف سے نفع کماتے ہیں۔ اس طرح یہ سلسلہ چلتا رہتا ہے۔ لیکن انھیں کبھی کبھی نقصان بھی اُٹھانا پڑتا ہے۔

جب قیمت فروخت، قیمت خرید سے زیادہ ہوتی ہے۔ تو نفع حاصل ہوتا ہے۔

یعنی

نفع = قیمت فروخت − قیمت خرید

اگر نفع کو 'P' سے، قیمت خرید کو 'c.p.' سے اور قیمت فروخت کو 's.p' سے ظاہر کریں تو

$$P = s.p - c.p$$

اسی طرح جب قیمت خرید، قیمت فروخت سے زیادہ رہتی ہے تو نقصان ہوتا ہے

یعنی

نقصان = قیمت خرید ـ قیمت فروخت

اگر نقصان کو 'L' سے ظاہر کریں تو

$$L = c.p - s.p$$

8.2 نفع یا نقصان فیصد معلوم کرنا

نفع یا نقصان فیصد سے مراد ایک سو (100) پر نفع یا نقصان معلوم کرنا ہے۔

نفع یا نقصان فیصد کے مسائل تین مختلف انداز سے سامنے آتے ہیں، جو درج ذیل ہیں۔

(1) اگر کل نفع یا نقصان معلوم ہو تو نفع یا نقصان فیصد معلوم کرنا۔

(2) اگر قیمت خرید اور نفع یا نقصان فیصد معلوم ہو تو قیمت فروخت معلوم کرنا۔

(3) اگر قیمت فروخت اور نفع یا نقصان فیصد معلوم ہو تو قیمت خرید معلوم کرنا۔

مندرجہ بالا بیانات کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1۔ ایک کتب فروش نے 72 کتابیں بحساب 11.50 روپے فی کتاب خرید کر تمام کتابیں 910.80 روپے میں فروخت کر دیں۔ نفع یا نقصان فیصد معلوم کیجیے۔

حل: ایک کتاب کی قیمت خرید 11.50 روپے ہے۔

72 کتابوں کی قیمت خرید ہوگی 72×11.50

= 828 روپے

جبکہ 72 کتابوں کی قیمت فروخت 910.80 روپے ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ قیمت فروخت، قیمت خرید سے زیادہ ہے۔ لہٰذا کتب فروش کو نفع ہوگا۔

کیونکہ قیمت خرید ـ قیمت فروخت = نفع

$= 910.80 - 828$

82.80 روپے = نفع

یعنی 828 روپے پر نفع = 82.80 روپے

تو ایک روپے پر نفع = $\frac{82.80}{828}$ روپے

اس لیے 100 روپے پر نفع = $\frac{82.80}{828} \times 100$

= 10 روپے

پس نفع 10 % ہوا

نوٹ، یاد رہے نفع یا نقصان فیصد ہمیشہ قیمت خرید پر نکالا جاتا ہے۔

مثال 2۔ ایک دکاندار نے ایک سلائی مشین 2500 روپے میں خرید کر $12\frac{1}{2}$% منافع پر فروخت کر دی۔ سلائی مشین کی قیمت فروخت معلوم کیجیے۔

حل:

قیمت خرید = 2500 روپے

نفع = $12\frac{1}{2}\%$

کل منافع = نفع فیصد × قیمت خرید

$= 12\frac{1}{2}\% \times 250$

$= \dfrac{\frac{25}{2}}{100} \times 2500$

$= \dfrac{25 \times 2500}{2 \times 100}$

$= \dfrac{625}{2}$

= 312.50 روپے

کیونکہ قیمت فروخت = نفع + قیمت خرید

اس لیے سلائی مشین کی قیمت فروخت = 312.50 + 2500

= 2812.50 روپے

مثال 3۔ ایک موٹر سائیکل 22000 روپے میں فروخت کرنے سے %10 نفع ہوتا ہے۔ موٹر سائیکل کی قیمت خرید معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ موٹر سائیکل کی قیمت خرید x روپے ہے۔ اس لیے

نفع = x کا %10

$= \frac{10}{100} \times x$

$= \frac{x}{10}$

کیونکہ قیمت فروخت = نفع + قیمت خرید

یا $\frac{x}{10} + x = 22000$

یا $\frac{x + 10x}{10} = 22000$

یا $\frac{11x}{10} = 22000$

یا $\frac{10}{11} \times \frac{11x}{10} = \frac{10}{11} \times 22000$

یا $x = 20000$

پس موٹر سائیکل کی قیمت خرید 20000 روپے ہے۔

مثال 4۔

ایک کارخانے کو 570000 روپے میں فروخت کرنے سے مالک کو 5 فیصد نقصان ہوتا ہے ۔ تو بتائیے وہ کس قیمت پر اسے فروخت کرے کہ اسے 5 فیصد نفع حاصل ہو؟

حل:

فرض کیا کہ قیمت خرید x ہے ۔ اس لیے

نقصان = x کا 5%

$= x \times \frac{5}{100}$

$= \frac{x}{20}$ روپے

کیونکہ

قیمت فروخت = قیمت خرید ۔ نقصان

یا $x - \frac{x}{20} = 570000$

یا $\frac{20x - x}{20} = 570000$

یا $\frac{19x}{20} = 570000$

یا $\frac{20}{19} \times \frac{19x}{20} = \frac{20}{19} \times 570000$

یا $x = \frac{20 \times \overset{30000}{\cancel{570000}}}{\cancel{19}}$

یا $x = 600000$

پس قیمت خرید 600000 روپے ہے۔

اگر نفع 5% ہو تو

منافع = نفع فی صد × قیمت خرید

$$= 5\% \times 600000$$

$$= \frac{5}{100} \times 600000$$

$$= \frac{5 \times 600000}{100}$$

پس = 30000 روپے

کیونکہ قیمت فروخت = قیمت خرید + نفع

$$= 30000 + 600000$$

= 630000 روپے

پس کارخانے کی قیمت فروخت 630000 روپے ہو تو نفع 5% ہوگا۔

مشق 8.1

1۔ ایک سائیکل 500 روپے میں خریدی گئی اور 150 روپے مرمت پر خرچ ہو گئے۔ پھر 725 روپے میں فروخت کردی گئی۔ نفع یا نقصان فیصد معلوم کیجیے۔

2۔ ایک شخص نے ایک قطعۂ زمین 25000 روپے میں خریدا۔ اس پر تین مکان اور تین دکانیں بنائیں مجموعی طور پر مکانوں اور دکانوں کو بنانے میں 50000 روپے خرچ کیے۔ اور پھر ایک مکان اور ایک دکان کو 45000 روپے میں فروخت کردیا۔ باقی مکانوں اور دکانوں کو 60000 روپے میں فروخت کردیا۔ نفع فیصد معلوم کیجیے۔

3۔ گرم کپڑوں کے بیوپاری نے 15 درجن کوٹ بحساب 125 روپے فی کوٹ خرید کر 12000 روپے میں فروخت کر دیے۔ نفع یا نقصان فیصد معلوم کیجیے۔ اور بتائیے کہ فی کوٹ اسے کتنا نفع یا نقصان ہوا ؟

4۔ ایک چائے فروش نے 20 کلوگرام چائے بحساب 220 روپے فی کلوگرام اور دوسرے قسم کی 20 کلوگرام چائے بحساب 230 روپے فی کلوگرام سے خریدی۔ اور دونوں کو ملاکر 250 روپے فی کلوگرام کے حساب سے فروخت کردی۔ بتائیے چائے فروش کو کتنا نفع ہوا ؟ نفع فیصد بھی معلوم کیجیے۔

5۔ ایک دکاندار نے 25 گھڑیاں بحساب 350 روپے فی گھڑی خرید کر اس طرح فروخت کیں کہ اسے 2 گھڑیوں کی قیمت خرید جتنا نفع ہوا۔ نفع فیصد معلوم کیجیے۔

6۔ موٹر سائیکل کے تاجر نے 10 موٹر سائیکل بحساب 17500 روپے فی موٹر سائیکل خرید کر انہیں 15 فیصد نفع پر فروخت کردیا۔ نفع فیصد معلوم کیجیے۔ اور یہ بھی بتائیے کہ ایک موٹر سائیکل پر تاجر کو کتنا نفع ہوا ؟

7- ٹیلی ویژن کے تاجر نے 10 ٹیلی ویژن بحساب 3750 روپے فی ٹیلی ویژن خریدے۔ 1000 روپے کرایہ کے خرچ ہوئے۔ تمام ٹیلی ویژن 44275 روپے میں فروخت کر دیے۔ نفع یا نقصان فیصد معلوم کیجیے۔ اور بتائیے کہ فی ٹیلی ویژن اسے کتنا نفع یا نقصان ہوا؟

8- ایک دکاندار نے چند برقی استریاں بحساب 210 روپے فی برقی استری خرید کر 1200 روپے میں 5 کے حساب سے فروخت کر دیں۔ نفع یا نقصان فیصد معلوم کیجیے۔

9- ایک شخص نے ایک تحفہ 110 روپے میں خریدا جس پر دکاندار نے 10% نفع کمایا۔ لیکن راستے میں گر جانے کی وجہ سے تحفے کا ایک حصہ ٹوٹ گیا۔ اس نے دکاندار کو دس روپے مزید دے کر تحفہ بدلوا لیا۔ بتائیے اس شخص کو تحفے کی کل کتنی رقم ادا کرنی پڑی اور دکاندار کو کتنے فی صد فائدہ ہوا۔

8.3 زکوٰۃ

زکوٰۃ دین اسلام کے پانچ بنیادی ارکان میں سے ایک ہے۔ اس سے مراد پاک ہونا، نشو و نما پانا، پھلنا پھولنا ہے۔ زکوٰۃ ادا کرنے کی قرآن مجید میں بارہا تاکید کی گئی ہے۔ ہر صاحبِ نصاب کو سال کے آخر میں اپنے مال کا $2\frac{1}{2}$ فیصد ناداروں اور ضرورتمندوں کو ادا کرنا لازمی ہوتا ہے۔

ہم ساتویں جماعت میں زکوٰۃ سے متعلق مختلف سوالات حل کرنا سیکھ چکے ہیں۔ اب ہم زکوٰۃ سے متعلق مزید سوالات حل کریں گے۔

مثال 1۔ ایک آدمی نے ایک سال میں 6000 روپے کی بچت کی۔ اور اس کی بیوی کے پاس 60 گرام سونے کے زیورات تھے۔ تو بتائیے وہ کتنی زکوٰۃ ادا کرے گا، جبکہ 10 گرام سونے کی قیمت 3150 روپے ہے؟

حل:

شرح زکوٰۃ $= 2\frac{1}{2}\%$

10 گرام سونے کی قیمت $= 3150$ روپے

1 گرام سونے کی قیمت $= \frac{3150}{10}$

60 گرام سونے کی قیمت $= \frac{3150 \times 60}{10}$

$= 18\,900$ روپے

سالانہ بچت $= 6000$ روپے

واجب زکوٰۃ رقم = (18900 + 6000) روپے

$= 24900$

واجب الادا زکوٰۃ = $2\frac{1}{2}\%$ کا 24900

$= \frac{\frac{5}{2}}{100} \times 24900$

$= \frac{5 \times 24900}{2 \times 100}$

$= \frac{1245}{2} =$ روپے 622.50

پس 622.50 روپے زکوٰۃ ادا کرنی ہوگی۔

مثال 2۔

ایک آدمی نے 625 روپے زکوٰۃ ادا کی۔ بتائیے کہ اُس کے پاس سال بھر میں کتنی رقم رہی ؟

حل:

زکوٰۃ = 625 روپے

شرح زکوٰۃ = $2\frac{1}{2}\%$

فرض کیا کل رقم x روپے ہے ۔

زکوٰۃ = $2\frac{1}{2}\%$ رقم کا

$\frac{\frac{5}{2}}{100} \times x = 625$ یا

$\frac{5x}{2 \times 100} = 625$ یا

$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\, x}{2 \times \cancel{100}_{20}} = 625$ یا

$\frac{x}{40} = 625$ یا

$40 \times \frac{x}{40} = 40 \times 625$ یا

$x = 25000$ یا

پس آدمی کے پاس سال بھر 25000 روپے رہے۔

مشق 8.2

1۔ ایک شخص نے ایک سال میں 9500 روپے بچائے اور اس کی بیوی کے زیورات کی مالیت 28350 روپے ہے۔ بتائیے سال کے آخر میں یہ کتنی زکوٰۃ ادا کرے گا؟

2۔ ایک شخص کی سالانہ بچت اس کی دو دکانوں اور دو مکانات کی آمدنی ہے۔ بتائیے وہ سال کے آخر میں کتنی زکوٰۃ ادا کرے گا جبکہ وہ 450 روپے فی دکان اور 1250 روپے فی مکان ماہانہ کرایہ وصول کرتا ہے؟

3۔ ایک کنبہ کی سالانہ بچت اتنی ہے، جتنی کہ سالانہ اخراجات ہیں۔ اگر سالانہ اخراجات 38500 روپے ہوں تو بتائیے کہ وہ کتنی زکوٰۃ ادا کرے گا؟

4۔ ایک شخص کی ماہانہ آمدنی 3750 روپے ہے۔ وہ 1800 روپے اپنی خوراک پر، 500 روپے بچوں کی تعلیم پر، 350 روپے دواؤں پر، 275 روپے سواری کا خرچ اور متفرق 525 روپے خرچ کرتا ہے۔ بتائیے وہ ایک سال میں کتنی رقم بچائے گا؟ اور اسے کتنی زکوٰۃ ادا کرنی پڑے گی؟

5۔ ایک کارخانے کے مالک کی ہر تین ماہ کی اوسط آمدنی 49500 روپے ہے۔ اور سالانہ اخراجات 95000 روپے ہیں۔ بتائیے وہ کتنی زکوٰۃ ادا کرے گا؟

6۔ ایک شخص نے 1062.50 روپے زکوٰۃ ادا کی۔ بتائیے اس کے پاس سال بھر کتنی رقم رہی؟

7۔ ایک شخص کے سالانہ اخراجات 34000 روپے ہیں۔ جبکہ وہ اپنی سالانہ بچت پر 1000 روپے زکوٰۃ ادا کرتا ہے۔ بتائیے اس کی سالانہ بچت کتنی ہے؟ اور سالانہ آمدنی بھی بتائیے۔

8۔ ایک گھرانے کی سالانہ آمدنی 115500 روپے ہے۔ اور سالانہ گھریلو اخراجات 42000 روپے ہیں۔ جبکہ سالانہ 26400 روپے مکان کا کرایہ ہے۔ اور متفرق اخراجات 12500 روپے ہیں۔ بتائیے وہ اپنی بچت پر کتنی زکوٰۃ ادا کرے گا؟

9۔ ایک شخص نے 1972.50 روپے زکوٰۃ کی مد میں دیے۔ تو بتائیے کہ اس کے پاس سال بھر کتنی رقم رہی؟

10۔ ایک شخص نے اپنی بیوی کے زیورات کی زکوٰۃ کی مد میں 2500 روپے دیے۔ تو بتائیے کہ اس کی بیوی کے زیورات کی مالیت کیا تھی؟

8.4 محاصل (Taxes)

جس طرح ایک گھر کے نظام کو چلانے کے لیے مناسب رقم کی ضرورت ہوتی ہے۔ اسی طرح کسی ملک کو چلانے کے لیے بھی ایک بڑی رقم کی ضرورت ہوتی ہے۔ یہ رقم حکومت شہریوں سے مختلف محاصل کی صورت میں وصول کرتی ہے۔ مثلاً کسی شخص کو جو آمدنی حاصل ہوتی ہے۔ اس آمدنی پر جو محصول لیا جاتا ہے۔ اُسے محصولِ آمدنی (Income Tax) کہتے ہیں۔ جائیداد پر جو محصول لیا جاتا ہے۔ اُسے محصولِ جائیداد (Property Tax) کہتے ہیں۔ اسی طرح کسی بلدیاتی حدود میں سامان لانے اور لے جانے پر محصول چُنگی، گاڑیوں کے مالکان سے محصول شاہراہ (Road Tax)، زمینداروں اور کاشتکاروں سے آبیانہ اور مالیہ وصول کیا جاتا ہے۔ لیکن اس باب میں ہم صرف ان محاصل کا ذکر کریں گے جن سے ایک عام شہری کا واسطہ پڑتا ہے۔

محصولِ آمدنی (Income Tax)

حکومت آمدنی کی ایک مقررہ حد سے زائد رقم پر جو محصول لیتی ہے۔ اسے "محصول آمدنی" کہتے ہیں۔ یہ آمدنی کی مختلف حدوں کے لیے مختلف شرح سے ادا کیا جاتا ہے۔ حکومت ہر سال محاصل پر نظر ثانی کرتی ہے اور اکثر ان کی شرحیں تبدیل کرتی رہتی ہے۔ تنخواہ دار ملازمت پیشہ حضرات کے لیے 50000 روپے اور کاروباری حضرات کے لیے 40000 روپے سالانہ تک کی آمدنی پر محصول آمدنی معاف ہے۔ ایک لاکھ روپے سے کم آمدنی پانے والے ملازمین یا کاروباری حضرات کے لیے شرح محصول 5 فیصد سالانہ ہے۔

مثال 1- ایک شخص کی سالانہ تنخواہ 75000 روپے ہے تو بتائیے وہ کتنا محصولِ آمدنی ادا کرے گا؟

حل: سالانہ کُل آمدنی 75000 روپے ہے۔

کیونکہ 50000 روپے تک کی آمدنی پر محصولِ آمدنی معاف ہے۔ لہٰذا پہلے کُل آمدنی میں سے 50000 روپے منہا کرلیں تاکہ قابل محصول آمدنی معلوم ہوسکے۔

قابل محصول آمدنی = 75000–50000 روپے

= 25000 روپے

کیونکہ محصولِ آمدنی = قابل محصول آمدنی کا 5%

$$= \frac{5}{100} \times 25000$$

$$= \frac{5 \times 25000}{100}$$

$= 1250$ روپے

پس وہ شخص 1250 روپے محصولِ آمدنی ادا کرے گا۔

مثال 2- زاہد کی تجارت سے سالانہ آمدنی 50000 روپے ہے۔ اور اس کی جائیداد سے سالانہ آمدنی 30000 روپے ہے اور دکانوں کا کرایہ سالانہ 12000 روپے ہے۔ بتائیے یہ کتنا محصولِ آمدنی ادا کرے گا، جبکہ 1000 روپے زکوٰۃ اور 1000 روپے محصولِ دولت کی مد میں ادا کیے ہوں؟

حل:

سالانہ تجارتی آمدنی = 50000 روپے

جائیداد سے سالانہ آمدنی = 30000 روپے

دکانوں کا کرایہ = 12000 روپے

کُل سالانہ آمدنی = 92000 روپے

اخراجات:

زکوٰۃ = 1000 روپے

محصولِ دولت = 1000 روپے

کُل خرچ = 2000 روپے

قابلِ محصول آمدنی روپے = 92000 − 2000 روپے

= 90000 روپے

محصولِ آمدنی میں چھوٹ = 40000 روپے

باقی = 50000 روپے

واجب الادا محصولِ آمدنی $= \frac{5}{100} \times 50000$

= 2500 روپے

پس زاہد 2500 روپے محصولِ آمدنی ادا کرے گا۔

مثال 3۔
ایک تنخواہ دار شخص نے اپنی سالانہ آمدنی پر 1550 روپے محصول ادا کیا ہو۔ تو اس کی سالانہ آمدنی کتنی تھی ؟

حل : فرض کیا کہ سالانہ آمدنی x روپے ہے۔
کیونکہ قابل محصول آمدنی پر محصول کی شرح 5% ہے۔

لہٰذا 5% کا $x = 1550$

یا $\frac{5}{100} \times x = 1550$

یا $\frac{100}{5} \times \frac{5x}{100} = \frac{100}{5} \times 1550$

یا $x = \frac{100 \times 1550}{5}$

یا $x = 31000$

کیونکہ 50000 روپے تک آمدنی پر محصول معاف ہے۔ لہٰذا

کُل سالانہ آمدنی = 50000 + 31000 روپے

= 81000 روپے

مشق 8.3

1۔ ایک تنخواہ دار شخص کی سالانہ آمدنی 81500 روپے ہو تو وہ کتنا محصولِ آمدنی ادا کرے گا ؟

2۔ ایک تنخواہ دار شخص کی سالانہ آمدنی 92200 روپے ہو تو وہ کتنا محصول ادا کرے گا ؟

3۔ جاوید نے کاروبار سے ایک سال میں 89500 روپے کمائے تو وہ کتنا محصول ادا کرے گا ؟

4۔ عامر کی کاروبار سے سالانہ آمدنی 93500 روپے ہے تو بتائیے اسے کتنا محصولِ آمدنی ادا کرنا پڑے گا ؟

5۔ ایک تنخواہ دار شخص نے اپنی سالانہ آمدنی پر 1795 روپے محصولِ آمدنی ادا کیا ہو تو اس کی سالانہ آمدنی معلوم کیجیے۔

6۔ ایک کاروباری شخص نے اپنی سالانہ آمدنی پر 2999 روپے محصولِ آمدنی ادا کیا ہو تو اس کی سالانہ آمدنی معلوم کیجیے۔

7- وقار احمد کی کاروبار سے سالانہ آمدنی 91500 روپے ہے۔ اس کی جائیداد سے سالانہ آمدنی 25000 روپے ہے اور تین دکانوں کا سالانہ کرایہ 5400 روپے ہے تو بتائیے کہ اُسے کتنا محصولِ آمدنی ادا کرنا پڑے گا جبکہ اس نے 1150 روپے زکوٰۃ کی مد میں اور 1150 روپے محصولِ دولت ادا کیا ہو؟

8- ایک تنخواہ دار شخص کی سالانہ آمدنی 48000 روپے ہے۔ اس کی جائیداد سے سالانہ آمدنی 21500 روپے ہے اور ایک مکان کا سالانہ کرایہ 18000 روپے ہے تو بتائیے کہ اُسے کتنا محصولِ آمدنی ادا کرنا پڑے گا، جبکہ اس نے زکوٰۃ کی مد میں 950 روپے اور محصولِ دولت 950 روپے ادا کیا ہو؟

9- انجم کی سالانہ تنخواہ 36550 روپے اور بونس 4554 روپے ہو تو اِسے کتنا محصولِ آمدنی ادا کرنا پڑے گا؟

10- آصف کی سالانہ تنخواہ 79995 روپے ہے۔ اور مکان کا سالانہ کرایہ 12000 روپے ہے تو واجب الادا محصولِ آمدنی معلوم کیجیے جبکہ 455 روپے محصولِ دولت اور 540 روپے زکوٰۃ ادا کی ہو؟

محصولِ جائیداد (Property Tax)

حکومت مختلف جائیدادوں کی مالیت کا تعین کرتی ہے اور پھر اس پر ایک خاص شرح سے سالانہ محصولِ جائیداد مقرر کیا جاتا ہے۔ مثالوں کے ذریعے یہاں اس کی وضاحت کی جارہی ہے۔

مثال 1- ایک مکان کی مالیت محصولِ جائیداد کے لیے 185000 روپے ہے۔ $1\frac{1}{2}$ فیصد شرح سالانہ کے حساب سے کتنا محصولِ جائیداد ادا کرنا پڑے گا؟

حل: 185000 روپے کا $1\frac{1}{2}$ فیصد $= \frac{1\frac{1}{2}}{100} \times 185000$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{100} \times 185000$$

$$= \frac{3 \times \overset{925}{\cancel{185000}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \times \cancel{100}}$$

$= 2775$ روپے

پس 2775 روپے محصولِ جائیداد ادا کرنا پڑے گا۔

مثال 2 - ایک شخص نے اپنی جائیداد پر $1\frac{1}{2}$ فیصد سالانہ کے حساب سے محصولِ جائیداد 4950 روپے ادا کیا ہو۔ تو اس کی جائیداد کی مالیت کیا تھی؟

حل: فرض کیا کہ جائیداد کی مالیت x روپے ہے۔ اس لیے

x کا $1\frac{1}{2}$ فیصد $= 4950$ روپے

یا $\frac{\frac{1}{2}}{100} \times x = 4950$

یا $\frac{3x}{2 \times 100} = 4950$

یا $\frac{3x}{200} = 4950$

یا $\frac{200}{3} \times \frac{3x}{200} = \frac{200}{3} \times 4950$

یا $x = \frac{200 \times \cancel{4950}^{1650}}{\cancel{3}_1}$

یا $x = 330000$

پس جائیداد کی مالیت 330000 روپے ہے۔

مشق 8.4

1- مندرجہ ذیل سوالات میں $1\frac{1}{2}$ فیصد شرح سالانہ کے حساب سے محصولِ جائیداد معلوم کیجیے۔

(i) اگر جائیداد کی مالیت 370000 روپے ہو۔

(ii) اگر ایک شخص کے پاس 325000 روپے مالیت کے دو مکانات ہوں۔

(iii) اگر ایک شخص کے پاس تین دکانیں ہوں اور ہر ایک دکان کی مالیت 95000 روپے ہو۔

(iv) اقبال کے پاس ایک مکان 455000 روپے مالیت کا اور دو دکانیں ہر ایک دکان کی مالیت 75000 روپے ہو۔

(v) ایک شخص کے پاس کل جائیداد اس کی دس دکانوں اور دو مکانوں پر مشتمل ہے۔ جبکہ ہر ایک دکان کی مالیت 65000 روپے اور ہر ایک مکان کی مالیت 550000 روپے ہو۔

2- مندرجہ ذیل سوالات میں جائیداد کی مالیت معلوم کیجیے۔

(i) شاہد نے 2 فیصد کے حساب سے 6750 روپے محصولِ جائیداد کی مد میں ادا کیے ہوں۔

(ii) سہیل نے اپنی دو دکانوں کی مالیت پر 3500 روپے 2 فیصد شرح سالانہ سے اور اپنے دو رہائشی مکانوں کی مالیت پر $1\frac{1}{2}$ فیصد شرح سالانہ کے حساب سے 9000 روپے محصولِ جائیداد کی مد میں ادا کیے ہوں۔

(iii) انجم اور شائستہ نے اپنی مشترکہ جائیداد چار دکانیں اور دو مکانات پر $1\frac{3}{4}$ فیصد کے حساب سے 20000 روپے محصولِ جائیداد کی مد میں ادا کیے ہوں۔

(iv) ایک شخص نے 2 فیصد کے حساب سے اپنی جائیداد پر 6650 روپے ادا کیے ہوں۔

(v) ایک شخص کی کل جائیداد 12 فلیٹ پر مشتمل ہے۔ یہ شخص سالانہ ہر فلیٹ پر $1\frac{1}{2}$ فیصد کے حساب سے 2370 روپے ادا کرتا ہے۔

نواں باب

جیومیٹری

9.1 متوازی خطوط کھینچنا

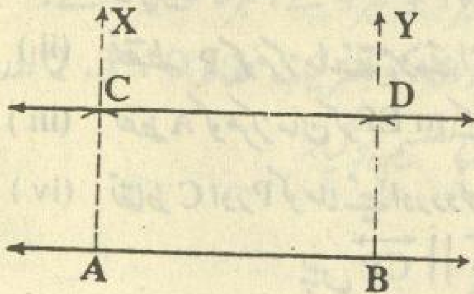
I۔ جب دو خطوط کا درمیانی فاصلہ دیا گیا ہو۔

مثال: 1.5 سینٹی میٹر کے فاصلے پر ایک خط کے متوازی ایک دوسرا خط کھینچیے۔

معلوم: خط AB اور اس سے مطلوبہ متوازی خط کا فاصلہ 1.5 سینٹی میٹر

مطلوب: $\overleftrightarrow{AB}$ کے متوازی 1.5 سینٹی میٹر کے فاصلے پر ایک خط کھینچنا۔

عمل:



(i) نقاط A اور B پر پرکار کی مدد سے $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ عمود کھینچیے۔

(ii) نقاط A اور B کو مرکز مانتے ہوئے 1.5 سینٹی میٹر رداس کی دو قوس لگائیے۔ جو $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ کو بالترتیب نقاط C اور D پر قطع کرتی ہیں۔

(iii) نقاط C اور D کو ملائیے اور دونوں اطراف میں بڑھائیے۔

پس $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

II۔ جب ایک خط اور اس کے باہر ایک نقطہ دیا گیا ہو۔

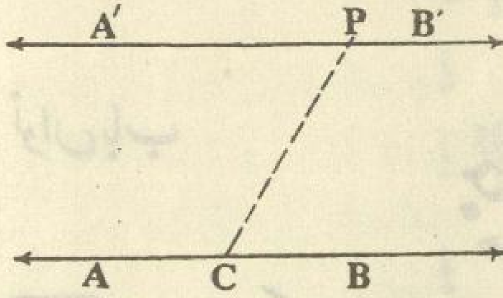
مثال: خط AB کے باہر دیے ہوئے نقطہ P میں سے ایک متوازی خط کھینچیے۔

حل: پہلا طریقہ

معلوم: خط AB اور اس کے باہر ایک نقطہ P

مطلوب: نقطہ P سے $\overleftrightarrow{AB}$ کے متوازی ایک خط کھینچنا۔

عمل:



(i) $\overleftrightarrow{AB}$ پر ایک نقطہ C لیں۔

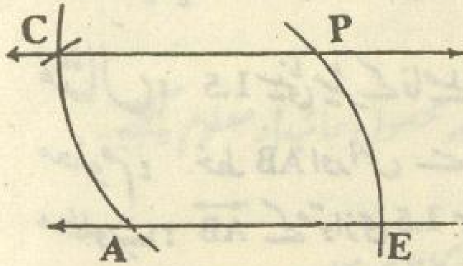
(ii) P اور C کو ملائیں۔

(iii) پرکار کی مدد سے زاویہ CPA' ، زاویہ PCB کے متماثل بنائیں۔

(iv) A′ P کو کسی بھی نقطہ B' تک بڑھائیں۔

اب $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$

دوسرا طریقہ



عمل:

(i) نقطہ A کو مرکز مان کر $m\overline{AP}$ کے برابر رداس کی ایک قوس کھینچیے۔ جو خط AB کو نقطہ E پر قطع کرتی ہو۔

(ii) نقطہ P کو مرکز مانتے ہوئے اسی رداس کی ایک اور قوس $\overset{\frown}{AC}$ کھینچیے۔

(iii) نقطہ A کو مرکز مان کر m EP کے برابر رداس کی ایک قوس کھینچیے۔ جو $\overset{\frown}{AC}$ کو نقطہ C پر قطع کرتی ہے

(iv) نقاط C اور P کو ملائیے اور دونوں اطراف میں بڑھائیے۔

پس $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CP}$

مشق 9.1

1. دیے ہوئے خط AB کے متوازی نیچے دیے ہوئے فاصلوں پر خطوط کھینچیے۔

(i) 3cm (ii) 3.5cm (iii) 5cm

(iv) 4.5cm (v) 2cm (vi) 5.5cm

2. قطعۂ خط AB کی لمبائی 6cm ہے۔ اس کے متوازی 4cm کی دُوری سے ایک خط کھینچیے۔

3. قطعۂ خط PQ کی لمبائی 5.8cm ہے۔ اس کے باہر کسی نقطہ R سے ایک متوازی خط کھینچیے۔

4. ABC ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے۔ جبکہ C نقطہ راس ہے۔ قاعدہ $\overline{AB}$ کے متوازی نقطہ C سے گزرتا ہوا خط کھینچیے۔ (مساوی الاضلاع مثلث میں تینوں اضلاع پیمائش میں برابر ہوتے ہیں)۔

5. ABC ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے۔ جبکہ B نقطہ راس ہے۔ قاعدہ AC کے متوازی نقطہ B سے گزرتا ہوا خط کھینچیے۔

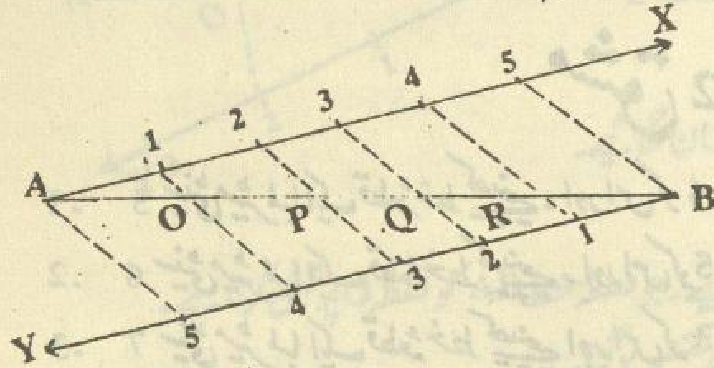
9.2 ایک قطعۂ خط کو متماثل قطعات میں تقسیم کرنا۔

مثال 1۔ ایک قطعۂ خط کو 5 متماثل قطعات خط میں تقسیم کیجیے جبکہ قطعۂ خط کی لمبائی 7 سینٹی میٹر ہے۔

معلوم : قطعۂ خط AB جبکہ $m\overline{AB} = 7cm$

مطلوب : قطعۂ خط AB کو پانچ برابر قطعات خط میں تقسیم کرنا۔

عمل :



(i) نقاط A اور B پر متماثل حادہ زاویے XAB∠ اور ABY∠ بنائیے۔

(ii) $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ پر کسی مناسب رداس سے برابر برابر فاصلوں پر 5 نشان لگائیے۔

(iii) $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ کے نمبر 5 کو نقاط A اور B سے ملائیے۔ اب نمبر 1 کو نمبر 4 سے، نمبر 2 کو نمبر 3 سے، نمبر 3 کو نمبر 2 سے اور نمبر 4 کو نمبر 1 سے ملائیے جو کہ قطعۂ خط AB کو بالترتیب نقاط O ، P ، Q اور R پر قطع کرتے ہیں۔ یعنی قطعۂ خط AB ، 5 متماثل قطعات میں تقسیم ہو گیا۔

علامتی طور پر اسے یوں لکھا جاتا ہے۔

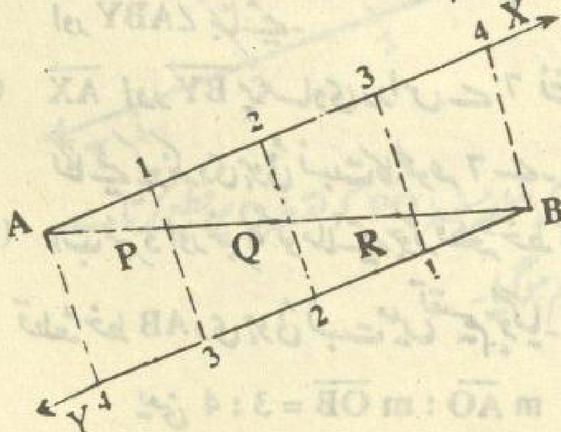
$$\overline{AO} \cong \overline{OP} \cong \overline{PQ} \cong \overline{QR} \cong \overline{RB}$$

مثال 2۔ ایک قطعۂ خط کو 4 متماثل قطعات خط میں تقسیم کیجیے۔ جبکہ قطعۂ خط کی لمبائی 5.6 سینٹی میٹر ہے۔

معلوم : قطعۂ خط AB جبکہ $m\overline{AB} = 5.6cm$

مطلوب : قطعۂ خط AB کو چار برابر قطعاتِ خط میں تقسیم کرنا۔

عمل :



(i) نقاط A اور B پر متماثل حادہ زاویے XAB∠ اور ABY∠ بنائیے

(ii) $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ پر کسی مناسب رداس سے برابر فاصلوں پر 4 نشان لگائیے۔

(iii) $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ کے نمبر 4 کو نقاط A اور B سے ملائیے۔ اب نمبر 1 کو نمبر 3 سے، نمبر 2 کو نمبر 2 سے اور نمبر 3 کو نمبر 1 سے ملائیے جو کہ قطعۂ خط AB کو بالترتیب P ، Q اور R پر قطع کرتے ہیں۔ یعنی قطعۂ خط AB، 4 متماثل قطعات میں تقسیم ہو گیا۔

علامتی طور پر اسے یوں لکھا جاتا ہے۔

$$\overline{AP} \cong \overline{PQ} \cong \overline{QR} \cong \overline{RB}$$

مشق 9.2

1. 5 سینٹی میٹر لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے۔ اور اس کو 4 متماثل قطعات میں تقسیم کیجیے۔
2. 6 سینٹی میٹر لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے۔ اور اس کو 5 متماثل قطعات میں تقسیم کیجیے۔
3. 7 سینٹی میٹر لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے اور اس کو 3 متماثل قطعات میں تقسیم کیجیے۔
4. 8 سینٹی میٹر لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے اور اس کو 4 متماثل قطعات میں تقسیم کیجیے۔
5. 7.5 سینٹی میٹر لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے اور اس کو 5 متماثل قطعات میں تقسیم کیجیے۔

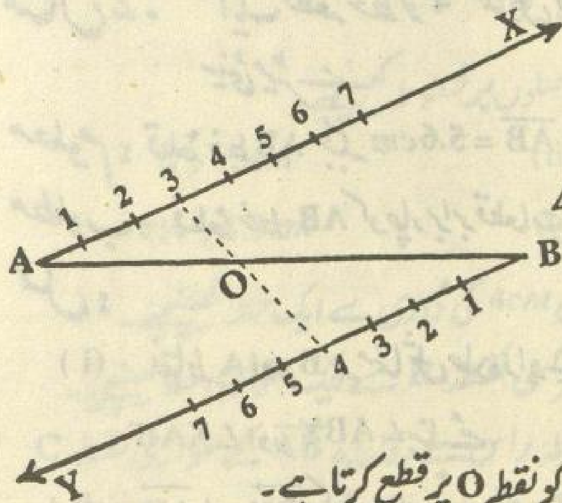
9.3 ایک قطعۂ خط کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرنا

مثال 1۔ 5.5 سینٹی میٹر کا ایک قطعۂ خط کھینچیے۔ اور اس کو 4 : 3 میں تقسیم کیجیے۔

معلوم: قطعۂ خط AB جبکہ $m\overline{AB} = 5.5cm$

مطلوب: $\overline{AB}$ کو 4 : 3 میں تقسیم کرنا۔

عمل:



(i) نقاط A اور B پر متماثل حادہ زاویے ∠XAB اور ∠ABY بنائیے۔

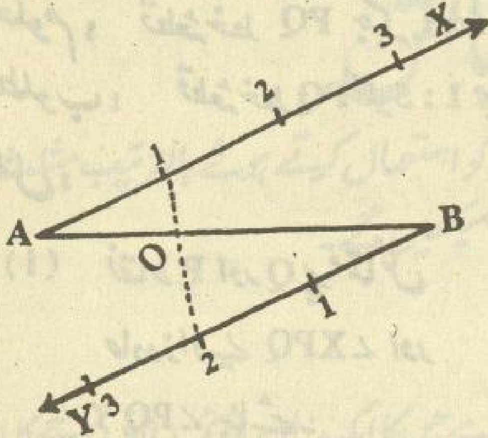
(ii) $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ پر مساوی رداس سے 7 نشان لگائیے کیونکہ دی ہوئی نسبت کا مجموعہ 7 ہے۔

(iii) اب نمبر 3 اور نمبر 4 کو ملائیے جو کہ قطعۂ خط AB کو نقطہ O پر قطع کرتا ہے۔

قطعۂ خط AB دی ہوئی نسبت میں تقسیم ہو گیا۔

یعنی $m\overline{AO} : m\overline{OB} = 3 : 4$

مثال 2۔ 4.5cm لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے۔ اور اسے 1 : 2 میں تقسیم کیجیے۔



معلوم: قطعۂ خط AB جبکہ $m\overline{AB} = 4.5cm$

مطلوب: قطعۂ خط AB کو 1 : 2 میں تقسیم کرنا۔

عمل:

(i) نقاط A اور B پر متماثل حادہ زاویے $\angle XAB$ اور $\angle ABY$ بنائیے۔

(ii) $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ پر مساوی رداس سے 3 نشان لگائیے۔ (کیونکہ دی ہوئی نسبت کا مجموعہ 3 ہے)۔

(iii) $\overrightarrow{AX}$ کے نمبر 1 اور $\overrightarrow{BY}$ کے نمبر 2 کو ملائیے۔ جو قطعۂ خط AB کو نقطہ O پر قطع کرتا ہے۔

پس قطعۂ خط AB دی ہوئی نسبت میں تقسیم ہوگیا۔

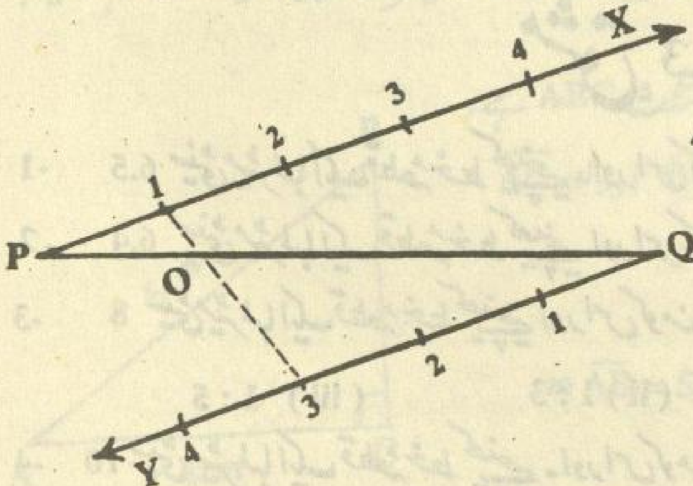
یعنی $m\overline{AO} : m\overline{OB} = 1 : 2$

مثال 3۔ 7cm لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے۔ اور اسے 3 : 1 میں تقسیم کیجیے۔

معلوم: قطعۂ خط PQ جبکہ $m\overline{PQ} = 7cm$

مطلوب: قطعۂ خط PQ کو 3 : 1 میں تقسیم کرنا۔

عمل:



(i) نقاط P اور Q پر متماثل حادہ زاویے $\angle XPQ$ اور $\angle PQY$ بنائیے۔

(ii) $\overrightarrow{PX}$ اور $\overrightarrow{QY}$ پر مساوی رداس سے 4 نشان لگائیے۔

(کیونکہ دی ہوئی نسبت کا مجموعہ 4 ہے)

(iii) $\overrightarrow{PX}$ کے نمبر 1 کو $\overrightarrow{QY}$ کے نمبر 3 سے ملائیے۔ جو کہ قطعۂ خط PQ کو نقطہ O پر قطع کرتا ہے۔

پس قطعۂ خط PQ دی ہوئی نسبت میں تقسیم ہوگیا۔

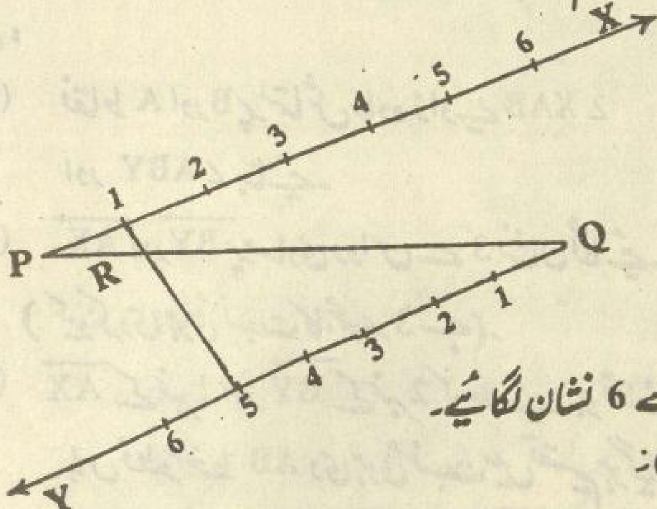
یعنی $m\overline{PO} : m\overline{OQ} = 1 : 3$

مثال 4۔ 6cm لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے اور اسے 5 : 1 میں تقسیم کیجیے۔

معلوم: قطعۂ خط PQ جبکہ $m\overline{PQ} = 6cm$

مطلوب: قطعۂ خط PQ کو 5 : 1 میں تقسیم کرنا۔

عمل:



(i) نقاط P اور Q پر متماثل حادہ زاویے $\angle XPQ$ اور $\angle PQY$ بنائیے۔

(ii) $\overrightarrow{PX}$ اور $\overrightarrow{QY}$ پر مساوی رداس سے 6 نشان لگائیے۔ (کیونکہ دی ہوئی نسبت کا مجموعہ 6 ہے)۔

(iii) $\overrightarrow{PX}$ کے نمبر 1 کو $\overrightarrow{QY}$ کے نمبر 5 سے ملائیے۔ جو کہ قطعۂ خط PQ کو نقطہ R پر قطع کرتا ہے۔

پس قطعۂ خط PQ دی ہوئی نسبت میں تقسیم ہو گیا۔

یعنی $m\overline{PR} : m\overline{RQ} = 1 : 5$

مشق 9.3

-1 6.5 سینٹی میٹر لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے۔ اور اس کو 3 : 2 میں تقسیم کیجیے۔

-2 6.4 سینٹی میٹر لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے اور اس کو 3:5 میں تقسیم کیجیے۔

-3 8 سینٹی میٹر لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے اور اس کو مندرجہ ذیل نسبت سے تقسیم کیجیے۔

(i) 1 : 2 (ii) 1 : 3 (iii) 1 : 5

-4 10 سینٹی میٹر لمبا ایک قطعۂ خط کھینچیے۔ اور اس کو مندرجہ ذیل نسبت میں تقسیم کیجیے۔

(i) 1 : 4 (ii) 4 : 3 (iii) 5 : 6

دسواں باب

مثلث کی پیمائش

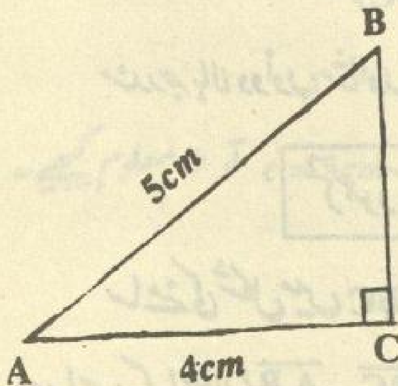
اس کتاب میں ہم مسئلہ فیثا غورث اور ہیرو کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے بالترتیب مثلث کے نامعلوم اضلاع کی لمبائی اور مثلثی علاقوں کا رقبہ معلوم کرنا سیکھیں گے۔

10.1 مسئلہ فیثا غورث

ہم جانتے ہیں کہ قائمۃ الزاویہ مثلث ایک ایسی مثلث ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ (90 درجے کا) ہوتا ہے۔

اب ہم ایک ایسے مسئلہ سے متعارف ہوتے ہیں، جس کے ذریعے کسی بھی دی ہوئی قائمۃ الزاویہ مثلث کے نامعلوم ضلع کی لمبائی معلوم کی جاسکتی ہے۔

اس مسئلہ کو مسئلہ فیثا غورث کہتے ہیں۔ فیثا غورث ساموس (Samos) کا رہنے والا تھا۔ لیکن اس نے 530 ق۔م کے بعد جنوبی اٹلی میں رہائش اختیار کرلی تھی۔ فیثا غورث کی کوئی بھی تصنیف کتابی صورت میں موجود نہیں ہے۔ لیکن اس ایک مسئلہ کی وجہ سے اس کا نام سائنس کی دنیا میں آج بھی پہچانا جاتا ہے۔ تکونیات کے مختلف مسائل کے حل کے لیے ریاضی اور انجنیئرنگ میں اسی مسئلہ کا سہارا لیا جاتا ہے۔



سامنے کی شکل میں ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC ہے، جس میں زاویہ C قائمہ ہے۔ $\overline{AB}$ وتر ہے، $\overline{BC}$ عمود اور $\overline{AC}$ قاعدہ ہے۔

جبکہ

$m\overline{AB} = 5cm$, $m\overline{AC} = 4cm$, $m\overline{BC} = 3cm$

اور ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(m\overline{AB})^2 = (5)^2 = 25\ cm^2 \quad ------(1)$$

$$(m\overline{AC})^2 = (4)^2 = 16\ cm^2 \quad ------(2)$$

$$(m\overline{BC})^2 = (3)^2 = 9\ cm^2 \quad ------(3)$$

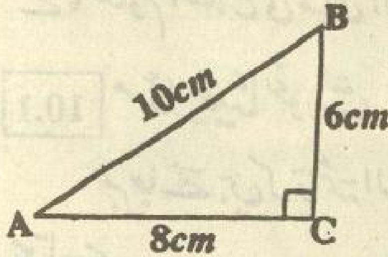
مساوات (2) اور (3) کو جمع کرنے سے

$$(m\overline{AC})^2 + (BC)^2 = 16 + 9 = 25\ cm^2 \text{---}(4)$$

اب ہم (1) اور (4) کا موازنہ کرتے ہیں۔ تو ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$(m\overline{AB})^2 = (m\overline{AC})^2 + (m\overline{BC})^2$$

یعنی ^{2}(وتر کی مقدار) = ^{2}(قاعدے کی مقدار) + ^{2}(عمود کی مقدار)



سامنے کی شکل میں ایک اور قائمۃ الزاویہ مثلث ABC ہے،

جس میں

$m\overline{AB} = 10cm$ ، $m\overline{AC} = 8cm$ ، $m\overline{BC} = 6cm$

اب

$$(m\overline{AB})^2 = (10)^2 = 100\ cm^2 \text{-----}(1)$$

$$(m\overline{AC})^2 = (8)^2 = 64\ cm^2 \text{-----}(2)$$

$$(m\overline{BC})^2 = (6)^2 = 36\ cm^2 \text{-----}(3)$$

مساوات (2) اور (3) کو جمع کرنے سے

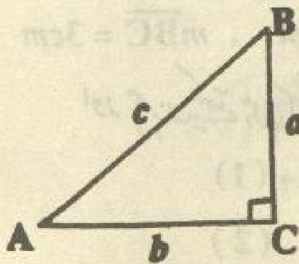
$$(m\overline{AC})^2 + (m\overline{BC})^2 = 64 + 36 = 100\ cm^2 \text{-----}(4)$$

اب (1) اور (4) کا موازنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(m\overline{AB})^2 = (m\overline{AC})^2 + (m\overline{BC})^2$$

مندرجہ بالا دونوں مثالوں سے ہم جس نتیجے پر پہنچتے ہیں وہ یہ ہے کہ

^{2}(وتر کی مقدار) = ^{2}(قاعدے کی مقدار) + ^{2}(عمود کی مقدار)



سامنے کی شکل میں $\triangle$ ABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے

اور اس کے اضلاع $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ کی مقداروں کو بالترتیب c ، a

اور b سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

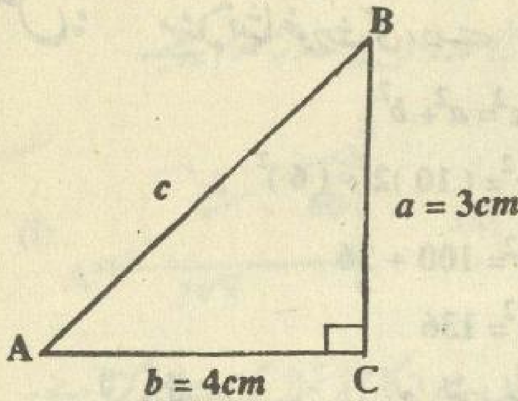
لہٰذا حاصل شدہ نتیجہ کو یوں ظاہر کرتے ہیں۔ $c^2 = a^2 + b^2$

اس نتیجہ کو مسئلہ فیثا غورث کہتے ہیں اور اسے الفاظ میں یوں بیان کیا جاتا ہے۔

"قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع رقبہ میں اس کے ساقین کے مربع کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔"

یہاں a اور b کو Δ ABC کے ساق کہا گیا ہے۔

مثال 1۔ قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں وتر یعنی 'c' کی لمبائی معلوم کیجیے جبکہ $a = 3cm$ اور $b = 4cm$ ہے۔



حل : مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$$c^2 = a^2 + b^2$$

a اور b کی قیمتیں درج کرنے سے

$$c^2 = (3)^2 + (4)^2$$

یا $$c^2 = 9 + 16$$

یا $$c^2 = 25$$

یا $$c^2 = (5)^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$c = 5cm$$

پس وتر کی لمبائی 5 سینٹی میٹر ہے۔

مثال 2۔ اگر قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $a = 3cm$ اور $c = 5cm$ تو b معلوم کیجیے۔

حل : مسئلہ فیثا غورث کی رو سے

$$c^2 = a^2 + b^2$$

یا $$b^2 = c^2 - a^2$$

a اور c کی قیمتیں درج کرنے سے

$$b^2 = (5)^2 - (3)^2$$

$b^2 = 25 - 9$ یا

$b^2 = 16$ یا

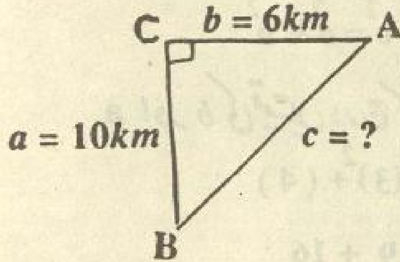
$b^2 = (4)^2$ یا

دونوں طرف کا جذر المربع لینے سے

$b = 4cm$

مثال 3۔ ایک سائیکل سوار 10 کلومیٹر شمال کی سمت سفر کرتا ہے اور وہاں سے 6 کلومیٹر مشرق کی سمت سفر کرتا ہے۔ بتائیے وہ اپنے نقطۂ آغاز سے کتنے فاصلے پر ہے؟

حل: مسئلہ فیثا غورث کی رو سے



$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (10)2^2 + (6)^2$ یا

$c^2 = 100 + 36$ یا

$c^2 = 136$ یا

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$c = 11.66$

پس سائیکل سوار اپنے نقطۂ آغاز سے 11.66 کلومیٹر کے فاصلے پر ہے۔

نوٹ:

1. یاد رہے کہ کسی بھی مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔
2. قائمۃ الزاویہ مثلث میں ایک زاویہ 90° اور دوسرے دو زاویوں کا مجموعہ 90° ہوتا ہے۔ اگر ان دو زاویوں میں سے ایک زاویہ کی مقدار معلوم ہو تو دوسرے زاویے کی مقدار معلوم کرنے کے لیے دیے ہوئے زاویے کو 90° میں سے تفریق کیا جاتا ہے۔

مثلاً ایک زاویہ کی مقدار 40° ہو تو دوسرے زاویے کی مقدار ہوگی:

$90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

مشق 10.1

-1 ABC Δ میں نامعلوم ضلع کی لمبائی معلوم کیجیے جبکہ $\angle C$ قائمہ ہے اور

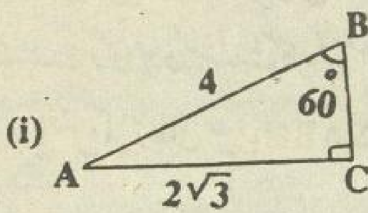
(i) $b = 3cm,\quad c = 5cm$ (ii) $a = 10cm,\quad c = 10\sqrt{2}\ cm$

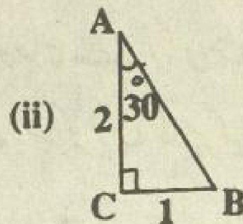
(iii) $b = 15cm,\quad c = 16cm$ (iv) $a = 8cm,\quad c = 10cm$

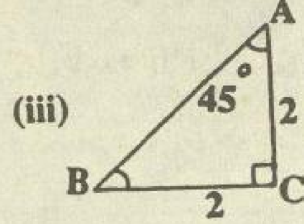
(v) $b = 16cm,\quad c = 20cm$ (vi) $a = 4.5cm,\quad c = 5.5cm$

(vii) $b = 3.5cm,\quad c = 7.5cm$ (viii) $a = 6.5cm,\quad c = 12.5cm$

-2 نیچے دی گئی قائمۃ الزاویہ مثلثوں ABC میں نامعلوم ضلع اور زاویہ کی مقدار معلوم کیجیے۔

(i)


(ii)


(iii)


-3 ایک کوہ پیما 10 کلومیٹر مشرق کی سمت جاتا ہے اور وہاں سے 3 کلومیٹر شمال کی سمت سفر کرتا ہے۔ بتائیے وہ اپنے نقطۂ آغاز سے کتنے فاصلے پر ہے؟

-4 ایک سیڑھی کا اوپر والا سرا دیوار پر 15 میٹر کی بلندی پر ٹکتا ہے، جبکہ اس کا پایہ دیوار سے 8 میٹر کے فاصلے پر ہے۔ سیڑھی کی لمبائی معلوم کیجیے۔

-5 دیوار سے سیڑھی کے پائے کا فاصلہ معلوم کیجیے۔ اگر سیڑھی کی لمبائی 65 میٹر اور دیوار پر بلندی 60 میٹر ہو۔

-6 اگر ایک مستطیل کا وتر 5 سم ہو۔ اور چوڑائی 4 سم ہو تو مستطیل کی لمبائی معلوم کیجیے۔ شکل بھی بنائیے۔

-7 ایک مستطیل کی چوڑائی معلوم کیجیے۔ اگر اس کا وتر 10 میٹر اور لمبائی 8 میٹر ہو۔

-8 مربع ABCD کا وتر معلوم کیجیے، جبکہ $m\overline{AB} = 4cm$

-9 اگر مربع ABCD میں $m\overline{AB} = \sqrt{18}cm$ ہو تو مربع کا وتر معلوم کیجیے۔

-10 اگر مربع ABCD میں $m\overline{AB} = 2.5cm$ ہو تو مربع کا وتر معلوم کیجیے۔

-11 اگر ایک مربع PQRS میں $m\overline{PQ} = 3cm$ ہو تو مربع کا وتر $\overline{PR}$ معلوم کیجیے۔

-12 اگر ایک مستطیل ABCD میں $m\overline{AB} = 8cm$ اور $m\overline{BC} = 6cm$ ہو تو مستطیل ABCD کے وتر $\overline{AC}$ کی مقدار کیا ہوگی؟

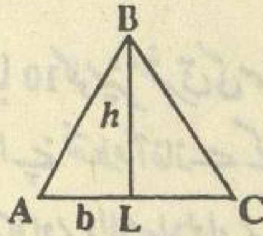
13۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلثی شکل کے ٹین کے ٹکڑے میں وتر کی مقدار 40 سم اور عمود کی مقدار 30 سم ہو تو ٹین کے ٹکڑے کے قاعدے کی مقدار معلوم کیجیے۔

14۔ ٹین کا ایک ٹکڑا جو قائمۃ الزاویہ مثلث کی شکل کا ہے۔ اور اس کے وتر کی مقدار 34 سم اور عمود کی مقدار 16 سم ہے۔ اس کے قاعدے کی مقدار معلوم کیجیے۔

15۔ ایک سیڑھی 300 سم لمبی ہے۔ اسے دیوار کے ساتھ لگانے پر اس کا نچلا پایہ دیوار سے 140 سم کے فاصلے پر تھا۔ دیوار کی اونچائی معلوم کیجیے، جہاں سیڑھی کا اوپر والا حصہ دیوار پر ٹکا ہوا ہے۔

10.2 مثلثی علاقوں کا رقبہ معلوم کرنا

اگر کسی مثلث کا ارتفاع (Altitude) معلوم ہو تو قاعدہ اور ارتفاع کے حاصل ضرب کو دو سے تقسیم کرنے سے دی ہوئی مثلث کا رقبہ معلوم ہو جاتا ہے۔ اگر کسی مثلث ABC میں قاعدہ 'b' اور ارتفاع 'h' ہو تو ریاضی کی زبان میں $\triangle ABC$ کے رقبہ کو یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔



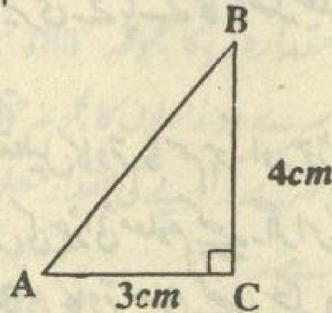
$\triangle ABC$ کا رقبہ $= \dfrac{b \times h}{2}$

یہاں $\overline{BL}$ جسے h سے ظاہر کیا گیا ہے، ارتفاع کہلاتا ہے۔

مثال۔

اگر مثلث ABC میں ارتفاع 4 سم ہو اور قاعدہ 3 سم ہو۔ تو رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ



$\triangle ABC$ کا رقبہ $= \dfrac{b \times h}{2}$

اس لیے b اور h کی قیمتیں درج کرنے سے

$\triangle ABC$ کا رقبہ $= \dfrac{3 \times 4}{2}$

$= 6$

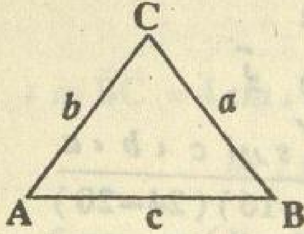
تو مثلث ABC کا رقبہ $6\ cm^2$ ہے۔

نوٹ: اگر اضلاع کی لمبائی سینٹی میٹر (cm) میں ہو۔ تو مثلث کے رقبہ کو مربع سینٹی میٹر (cm^2) لکھا جاتا ہے۔

10.3 ہیرو کا کلیہ (Hero's Formula)

اگر کسی مثلث میں ارتفاع معلوم نہ ہو۔ لیکن تینوں اضلاع کی مقداریں دی گئی ہوں۔ تو ہیرو کے کلیہ کی مدد سے اس کا رقبہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

اگر ہم ایک مثلث ABC لیں، جس میں $m\overline{AB} = c$ ، $m\overline{BC} = a$ اور $m\overline{AC} = b$ ہو۔ تو ہیرو کے کلیہ کو ریاضی کی زبان میں یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔



$$\triangle ABC \text{ کا رقبہ } = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

یہاں s سے مراد $\triangle ABC$ کے احاطہ کی نصف مقدار ہے۔

یعنی

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

اس کی مزید وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1۔ $\triangle ABC$ کا رقبہ معلوم کیجیے اگر $a = 6\ cm$ ، $b = 8cm$ اور $c = 10\ cm$ ہو۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

a ، b اور c کی قیمتیں درج کرنے سے

$$= \frac{1}{2}(6+8+10)$$

$$= \frac{1}{2} \times 24$$

تو

$$s = 12\ cm$$

کیونکہ

$$\triangle ABC \text{ کا رقبہ } = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

a ، b ، c اور s کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\triangle ABC \text{ کا رقبہ } = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}$$

$$= \sqrt{12 \times 6 \times 4 \times 2}$$

$$= \sqrt{12 \times 12 \times 2 \times 2}$$

$$= 12 \times 2 = 24\ cm^2$$

پس $\triangle ABC$ کا رقبہ $24cm^2$ ہے۔

مثال 2- اگر $a = 12\ cm$ ، $b = 16\ cm$ اور $c = 20cm$ ہو تو مثلث ABC کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

a ، b اور c کی قیمتیں درج کرنے سے

$$s = \frac{1}{2}(12 + 16 + 20)$$

یا $s = \frac{1}{2} \times 48 = 24cm$

تو ΔABC کا رقبہ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

a ، b ، c اور s کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ } = \sqrt{24(24-12)(24-16)(24-20)}$$

$$= \sqrt{24 \times 12 \times 8 \times 4}$$

$$= \sqrt{12 \times 12 \times 8 \times 8}$$

$$= 12 \times 8 = 96cm^2$$

پس ΔABC کا رقبہ 96 مربع سینٹی میٹر

مشق 10.2

1۔ اگر مثلث A B C قائمۃ الزاویہ ہو تو مندرجہ ذیل دیے ہوئے ارتفاع اور قاعدہ کی مدد سے رقبہ معلوم کیجیے۔

(i) $h = 5cm, \quad b = 3cm$ (ii) $h = 9cm, \quad b = 4cm$

(iii) $h = 12cm, \quad b = 20cm$ (iv) $h = 15\ cm, \quad b = 10\ cm$

(v) $h = 7\ cm, \quad b = 4\ cm$ (vi) $h = 3.5\ cm, \quad b = 2.5\ cm$

(vii) $h = 7.5\ cm, \quad b = 4.5\ cm$ (viii) $h = 12.5\ cm, \quad b = 6.5\ cm$

(ix) $h = 8\ cm, \quad b = 8.25\ cm$ (x) $h = 4.25\ cm, \quad b = 5.25cm$

2۔ مندرجہ ذیل اضلاع کی مدد سے مثلث ABC کا رقبہ معلوم کیجیے اگر

(i) $a = 4\ cm, b = 5\ cm, c = 7\ cm$ (ii) $a = 8\ cm, b = 5\ cm, c = 9\ cm$

(iii) $a = 12\ cm, b = 16\ cm, c = 20\ cm$ (iv) $a = 17\ cm, b = 18\ cm, c = 28\ cm$

(v) $a = 11\ cm, b = 10\ cm, c = 15\ cm$ (vi) $a = 3.5\ cm, b = 4.5\ cm, c = 6\ cm$

(vii) $a = 12\ cm, b = 15.5\ cm, c = 18.5\ cm$ (viii) $a = 2.5\ cm, b = 5\ cm, c = 9.5\ cm$

(ix) $a = 3\ cm, b = 4\ cm, c = 5\ cm$ (x) $a = 6\ cm, b = 8\ cm, c = 10cm$

گیارہواں باب

چوکور کی بناوٹ اور اس کا رقبہ

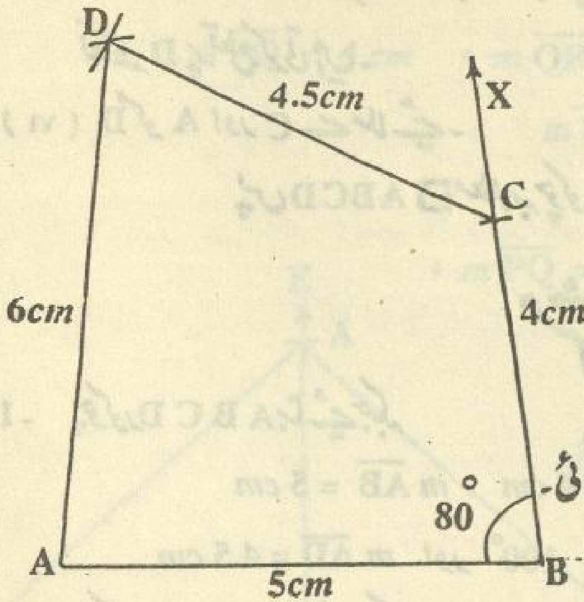
11.1 چوکور کی بناوٹ

پہلی صورت: جب چاروں اضلاع اور ایک زاویہ دیا گیا ہو۔

مثال۔ ایک چوکور ABCD بنائیے، جس میں $m\overline{AB} = 5\ cm$ ، $m\overline{BC} = 4\ cm$ ،
$m\overline{CD} = 4.5\ cm$ ، $m\overline{AD} = 6\ cm$ اور $m\angle B = 80^\circ$

معلوم: $m\overline{AD} = 6\ cm$, $m\angle B = 80^0$, $m\overline{AB} = 5\ cm$, $m\overline{BC} = 4\ cm$, $m\overline{CD} = 4.5$

مطلوب: مذکورہ معلومات کے مطابق چوکور ABCD بنانا۔



عمل:

(i) خط AB کھینچیے جبکہ $m\overline{AB} = 5\ cm$

(ii) نقطہ B پر $m\angle ABC = 80^\circ$ بنائیے۔

(iii) $\overrightarrow{BX}$ پر نقطہ B کو مرکز مان کر 4 cm رداس پر ایک قوس بنائی۔ اس طرح $m\overline{BC} = 4\ cm$ حاصل ہوا۔

(iv) نقطہ A کو مرکز مان کر 6 cm رداس کی ایک قوس بنائی۔

(v) نقطہ C کو مرکز مان کر 4.5 cm رداس کی ایک اور قوس بنائیے جو پہلی قوس کو نقطہ D پر قطع کرتی ہے۔

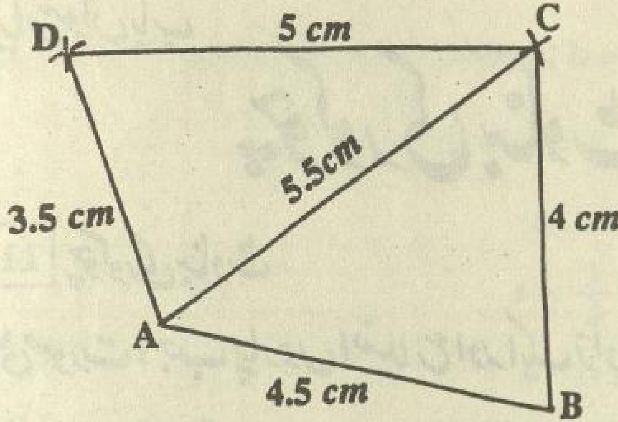
(vi) نقطہ D کو A اور C سے ملائیے۔

پس ABCD □ مطلوبہ چوکور ہے۔

دوسری صورت: جب چاروں اضلاع اور ایک وتر دیا گیا ہو۔

مثال۔ ایک چوکور A B C D بنائیے۔ جس میں $m\overline{AB} = 4.5\ cm$ ، $m\overline{BC} = 4\ cm$
$m\overline{CD} = 5cm$ ، $m\overline{AD} = 3.5\ cm$ اور $m\overline{AC} = 5.5cm$

معلوم: $m\overline{AB} = 4.5\ cm$ ، $m\overline{BC} = 4\ cm$ ، $m\overline{CD} = 5\ cm$
$m\overline{AD} = 3.5\ cm$ اور $m\overline{AC} = 5.5cm$



مطلوب: چوکور A B C D بنانا۔

عمل:

(i) قطعۂ $\overline{AB}$ کھینچیے جبکہ

$m\,\overline{AB} = 4.5\ cm$

(ii) نقطہ B کو مرکز مان کر 4 cm رداس کی ایک قوس لگائیے۔

(iii) نقطہ A کو مرکز مان کر 5.5 cm رداس کی ایک اور قوس لگائیے۔ جو پہلی قوس کو نقطہ C پر قطع کرتی ہے۔

(iv) نقطہ C کو نقاط A اور B سے ملائیے۔

(v) نقاط A اور C کو مرکز مانتے ہوئے بالترتیب 3.5 cm اور 5 cm کی قوس لگائیے۔ جو کہ ایک دوسرے کو نقطہ D پر قطع کرتی ہیں۔

(vi) D کو A اور C سے ملائیے۔

پس ABCD ☐ مطلوبہ چوکور ہے۔

مشق 11.1

1۔ چوکور A B C D بنائیے جبکہ

$m\,\overline{AB} = 5\ cm$ ، $\overline{BC} = 4\ cm$ ، $m\,\overline{CD} = 6\ cm$ ،

$m\,\overline{AD} = 4.5\ cm$ اور $m\angle B = 100^\circ$

2۔ چوکور ABCD بنائیے جبکہ

$m\,\overline{BC} = 6\ cm$ ، $m\,\overline{AB} = 5.5\ cm$ ، $m\,\overline{CD} = 3.5\ cm$ ،

$m\,\overline{AD} = 6.5\ cm$ اور $m\angle A = 60^\circ$

3۔ چوکور PQRS بنائیے جبکہ

$m\,\overline{PQ} = 3.5\ cm$ ، $m\,\overline{QR} = .5\ cm$ ، $m\,\overline{RS} = 5.5\ cm$ ،

$m\,\overline{PS} = 4\ cm$ اور $m\,\overline{PR} = 7.cm$

4۔ چوکور PQRS بنائیے جبکہ

$m\overline{RS} = 5.2\ cm$ ، $m\overline{QR} = 3.5\ cm$ ، $m\overline{PQ} = 4.5\ cm$

$m\overline{QS} = 6\ cm$ اور $m\overline{PS} = 4.6\ cm$

5۔ چوکور ABCD بنائیے جبکہ

$m\overline{AB} = 6\ cm$ ، $m\overline{BC} = 7.3\ cm$ ، $m\overline{CD} = 6.9\ cm$

$m\angle B = 75^\circ$ اور $m\overline{DA} = 8cm$

6۔ چوکور ABCD بنائیے جبکہ

$m\overline{AB} = 5\ cm$ ، $m\overline{BC} = 6.3\ cm$ ، $m\overline{CD} = 7\ cm$

$m\angle B = 60^\circ$ اور $m\overline{DA} = 7.6\ cm$

7۔ چوکور PQRS بنائیے جبکہ

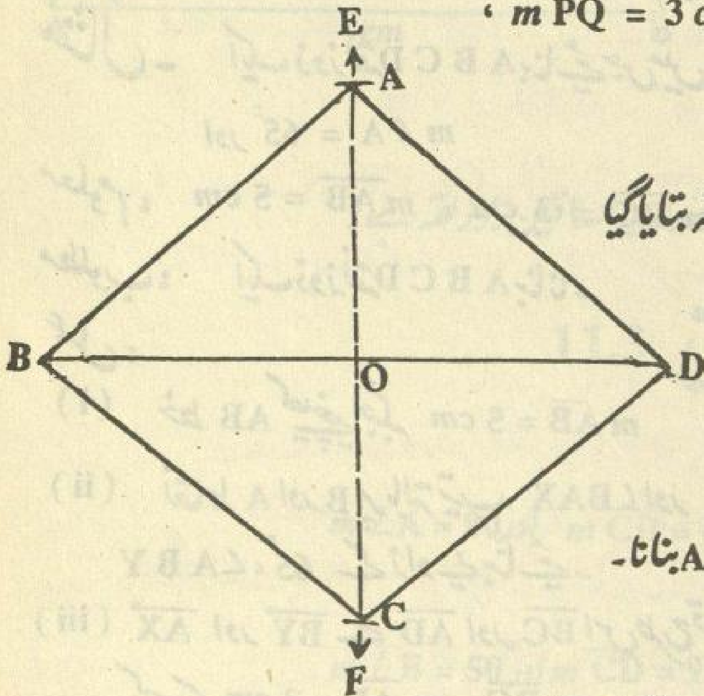
$m\overline{PQ} = 4\ cm$ ، $m\overline{QR} = 6\ cm$ ، $m\overline{RS} = 8\ cm$

$m\overline{SP} = 6.8\ cm$ اور $m\overline{SQ} = 7.5\ cm$

8۔ چوکور PQRS بنائیے جبکہ

$m\overline{PQ} = 3\ cm$ ، $m\overline{QR} = 5\ cm$ ، $m\overline{RS} = 7\ cm$

$m\overline{RP} = 6\ cm$ اور $m\overline{SP} = 9\ cm$



11.2 معین کی بناوٹ

مندرجہ ذیل مثال میں معین بنانے کا طریقہ بتایا گیا ہے جبکہ معین کا دتر دیا گیا ہو۔

مثال 1- ایک معین ABCD بنائیے جبکہ

$m\overline{BD} = 7\ cm$ اور $m\overline{AC} = 6\ cm$

معلوم : $m\overline{BD} = 7\ cm$ ، $m\overline{AC} = 6\ cm$

مطلوب : دی ہوئی معلومات کے مطابق معین ABCD بنانا۔

عمل :

(i) خط BD کھینچیے جبکہ $m\overline{BD} = 7\ cm$

(ii) $\overline{BD}$ کا عمودی ناصف کھینچیے جو $\overline{BD}$ کو نقطہ O پر قطع کرتا ہے۔

(iii) O کو مرکز مان کر $\frac{1}{2} m\overline{AC}$ یعنی 3cm رداس کی دو قوسیں لگائیے۔

جو کہ $\overleftrightarrow{EF}$ کو نقاط A اور C پر قطع کریں۔

(iv) $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ اور $\overline{AD}$ کو ملائیں۔

پس ABCD مطلوبہ معین ہے۔

مشق 11.2

1- معین A B C D بنائیے جبکہ $m\overline{AC} = 5\ cm$ اور $m\overline{BD} = 8\ cm$

2- معین P Q R S بنائیے جبکہ $m\overline{PR} = 8\ cm$ اور $m\overline{QS} = 6\ cm$

3- معین W X Y Z بنائیے جبکہ $m\overline{WY} = 5.5\ cm$ اور $m\overline{XZ} = 4.5\ cm$

4- معین A B C D بنائیے جبکہ $m\overline{AC} = 4.5\ cm$ اور $m\overline{BD} = 7\ cm$

5- معین P Q R S بنائیے جبکہ $m\overline{PR} = 6.5\ cm$ اور $m\overline{QS} = 4\ cm$

11.3 ذوزنقہ کی بناوٹ

مندرجہ ذیل مثالوں میں ذوزنقہ بنانے کے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے جب کہ ذوزنقہ کے قاعدہ کی پیمائش، قاعدہ کا ایک زاویہ اور ایک غیر متوازی ضلع دیے گئے ہوں۔

مثال۔ ایک ذوزنقہ A B C D بنائیے جس میں $m\overline{AB} = 5\ cm$ ، $m\overline{BC} = 3cm$ اور $m\angle A = 65^\circ$

معلوم: $m\overline{AB} = 5\ cm$ ، $m\overline{BC} = 3\ cm$ اور $m\angle A = 65^\circ$

مطلوب: ایک ذوزنقہ A B C D بنانا۔

عمل:

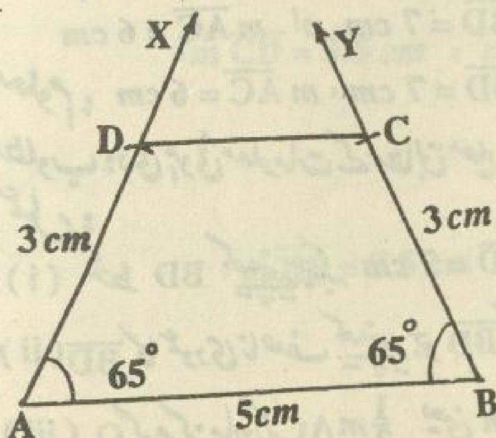
(i) خط AB کھینچیے جبکہ $m\overline{AB} = 5\ cm$

(ii) نقاط A اور B پر بالترتیب $\angle BAX$ اور $\angle ABY$ ، 65° کے زاویے بنائیے۔

(iii) $\overrightarrow{AX}$ اور $\overrightarrow{BY}$ سے $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$ اس طرح قطع کیجیے کہ $m\overline{BC} = m\overline{AD} = 3\ cm$

(iv) نقاط C اور D کو ملائیے۔

پس □A B C D مطلوبہ ذوزنقہ ہے۔



11.4 مساوی الساقین ذوزنقہ کی بناوٹ

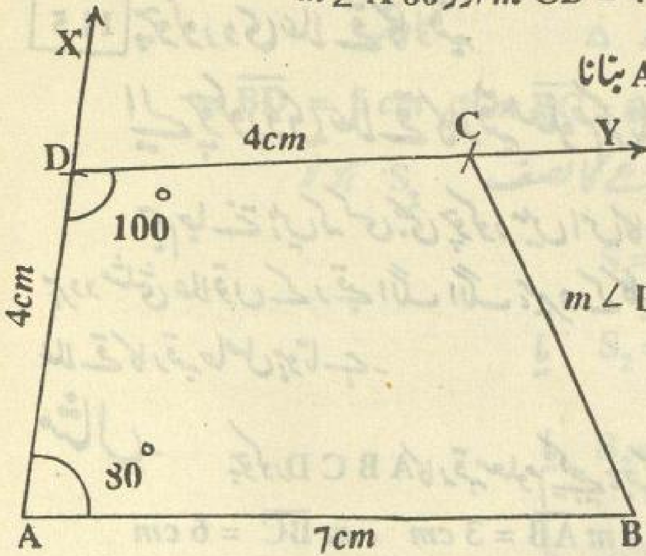
مندرجہ ذیل مثال میں ذوزنقہ بنانے کے طریقے کی وضاحت کی گئی ہے۔ جب کہ قاعدہ اور غیر متوازی اضلاع دیے گئے ہوں۔

مثال ایک مساوی الساقین ذوزنقہ A B C D بنایے جبکہ

$m\overline{CD} = 4\ cm$ ، $m\overline{AB} = 7\ cm$ ، $m\overline{AD} = 4\ cm$ اور $m\angle A = 80^\circ$

معلوم: $m\overline{AB} = 7\ cm$ ، $m\overline{AD} = 4\ cm$ ، $m\overline{CD} = 4\ cm$ اور $m\angle A\ 80^\circ$

مطلوب: ایک مساوی الساقین ذوزنقہ A B C D بنانا



عمل:

(i) قطعۂ AB کھینچیے جبکہ $m\overline{AB} = 7\ cm$

(ii) نقطہ A پر $\angle BAX$ بنائیے جبکہ $m\angle BAX = 80^\circ$

(iii) $\overrightarrow{AX}$ پر $m\overline{AD} = 4cm$ لیجیے

(iv) نقطہ D پر $\angle ADY$ بنائیے جبکہ

$m\ \angle ADY = (180^\circ - 80^\circ) = 100^\circ$

(v) $\overrightarrow{DY}$ پر $m\overline{DC} = 4\ cm$ قطع کیجیے۔

(vi) قطعۂ خط B C کھینچیے۔

پس A B C D □ مطلوبہ مساوی الساقین ذوزنقہ ہے۔

مشق 11.3

1- ایک ذوزنقہ A B C D بنائیے جبکہ

$m\overline{AB} = 8\ cm$ ، $m\overline{AD} = 3\ cm$ ، $m\overline{CD} = 4\ cm$ اور $m\angle A = 80^\circ$

2- ایک ذوزنقہ A B C D بنائیے جبکہ

$m\overline{BC} = 4cm$ ، $m\overline{AB} = 5.5\ cm$ ، $m\overline{CD} = 9\ cm$ اور $m\angle B = 50^\circ$

3- ایک ذوزنقہ P Q R S بنائیے جبکہ

$m\overline{PS} = 4\ cm$ ، $m\overline{PQ} = 5\ cm$ ، $m\overline{SR} = 7\ cm$ اور $m\angle P = 70^\circ$

4- ایک مساوی الساقین ذوزنقہ بنائیے جس کے قاعدہ کی مقدار 5 cm ، زاویہ کی مقدار 100° اور غیر متوازی ضلع کی مقدار 3.5 cm ہے۔

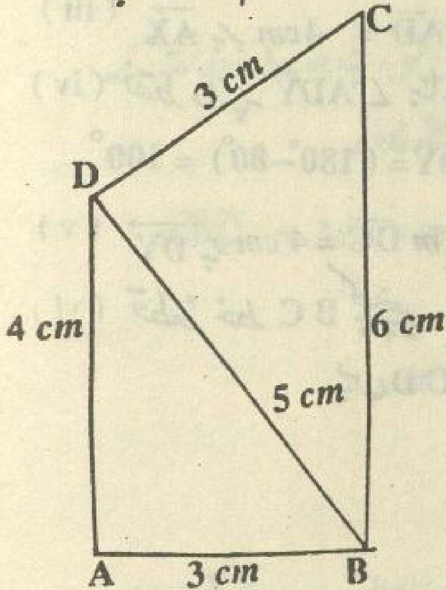
5- ایک مساوی الساقین ذوزنقہ بنائیے جس کے قاعدہ کی مقدار 7.5 cm ، زاویہ کی مقدار 55° اور غیر متوازی ضلع کی مقدار 5 cm ہے۔

6- ایک مساوی الساقین ذوزنقہ بنائیے جس کے قاعدے کی مقدار 6.5 cm ، زاویہ کی مقدار 75° اور غیر متوازی ضلع کی مقدار 5 cm ہے۔

11.5 چوکوروی علاقے کا رقبہ

ایسے چوکوروی علاقے کا رقبہ معلوم کرنا جس کے اضلاع اور ایک وتر کی مقدار معلوم ہو۔

ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی چوکور میں اس کا وتر اس چوکور کو دو مثلثی علاقوں میں تقسیم کر دیتا ہے ہر دو مثلثی علاقوں کے رقبے الگ الگ ہیرو کے کلیہ کی مدد سے معلوم کر کے مجموعہ معلوم کرنے سے چوکوروی علاقے کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔



مثال۔ چوکور A B C D کا رقبہ معلوم کیجیے، جبکہ

$m\overline{AD} = 4\ cm$ ، $m\overline{AB} = 3\ cm$ ، $m\overline{BC} = 6\ cm$

$m\overline{DC} = 3\ cm$ ، $m\overline{BD} = 5\ cm$

حل: سامنے کی شکل میں چوکوروی علاقہ A B C D دو مثلثی علاقوں A B D ، B C D پر مشتمل ہے۔

لہٰذا

چوکوروی علاقہ ABCD کا رقبہ = مثلثی علاقہ A B D کا رقبہ + مثلثی علاقہ B C D کا رقبہ

مثلث A B D میں $m\overline{AB} = 3\ cm$ ، $m\overline{AD} = 4\ cm$ اور $m\,BD = 5\ cm$

اور اگر مثلث A B D کے اضلاع کی لمبائیوں کے مجموعے کا نصف S_1 ہو تو

$$S_1 = \frac{1}{2}(m\overline{AB} + m\overline{BD} + m\overline{AD})$$

یا $$S_1 = \frac{1}{2}(3 + 5 + 4)$$

یا $$S_1 = \frac{1}{2} \times 12$$

یا $S_1 = 6\ cm$

ہیرو کے کلیہ کے مطابق

$\triangle ABD$ کا رقبہ $= \sqrt{S_1(S_1 - m\overline{AB})(S_1 - m\overline{AD})(S_1 - m\overline{BD})}$

$= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$

$= \sqrt{6 \times 3 \times 2 \times 1}$

$= \sqrt{6 \times 6}$

پس $\triangle ABD$ کا رقبہ $= 6$ *square cm*

مثلث BCD میں $m\overline{DC} = 3\ cm$، $m\overline{BC} = 6\ cm$ اور $m\overline{BD} = 5\ cm$

اور اگر مثلث BCD کے اضلاع کی لمبائیوں کے مجموعے کا نصف S_2 ہو تو

$$S_2 = \frac{1}{2}(m\overline{DC} + m\overline{BC} + m\overline{BD})$$

یا $S_2 = \frac{1}{2}(3 + 6 + 5)$

یا $S_2 = \frac{1}{2} \times 14$

یا $S_2 = 7\ cm$

اس لیے ہیرو کے کلیہ کے مطابق

$\triangle BCD$ کا رقبہ $= \sqrt{S_2(S_2 - m\overline{DC})(S_2 - m\overline{BC})(S_2 - m\overline{BD})}$

$= \sqrt{7(7-3)(7-6)(7-5)}$

$= \sqrt{7 \times 4 \times 1 \times 2}$

$= \sqrt{7 \times 8}$

$= \sqrt{56}$

پس (تقریباً) $\triangle BCD$ کا رقبہ $= 7.5\ cm^2$

اب $\square ABCD$ کا رقبہ $=$ $\triangle ABD$ کا رقبہ $+$ $\triangle BCD$ کا رقبہ

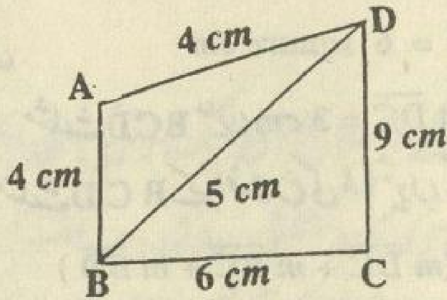
$= (6 + 7.5)$

پس (تقریباً) $\square ABCD$ کا رقبہ $= 13.5 cm^2$

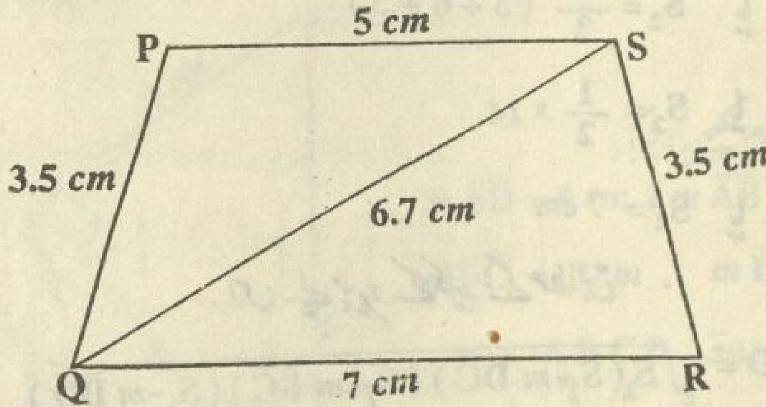
مشق 11.4

1۔ چوکور ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ ان کے اضلاع کی مقداریں 5 cm ، 6 cm ، 4 cm اور 7 cm ہوں اور اس کے وتر $\overline{AC}$ کی مقدار 8 cm ہو۔

2۔ چوکور ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے۔



3۔ چوکور PQRS کا رقبہ معلوم کیجیے۔



4۔ چوکور ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے، جبکہ اس کے وتر $\overline{AC}$ کی مقدار 10 cm اور متقابل راسوں سے ارتفاع بالترتیب 5 cm اور 7 cm ہو۔

5۔ چوکور ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے، جبکہ اس کے وتر $\overline{BC}$ کی مقدار 11 cm اور متقابل راسوں سے ارتفاع بالترتیب 15 cm اور 18 cm ہو۔

بارہواں باب

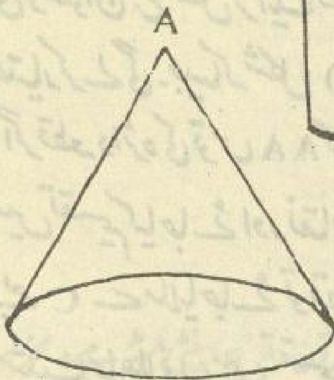
مخروط کا سطحی رقبہ اور اس کا حجم

12.1 مخروط



شکل (1)

سامنے کی شکل (1) میں ایک تراشی ہوئی پنسل دکھائی گئی ہے۔ اور شکل (2) میں پنسل کا تراشہ ہوا حصہ علیحدہ دکھایا گیا ہے۔ یہ تراشا ہوا حصہ مخروط کہلاتا ہے۔ شکل (2) میں نقطہ A مخروط کا راس (vertex) کہلاتا ہے۔ مخروط میں کوئی سیدھا کنارا نہیں ہوتا اور اس کا قاعدہ دائروی شکل کا ہوتا ہے۔ گاجر، مولی اور خیمہ مخروط کی مثالیں ہیں۔

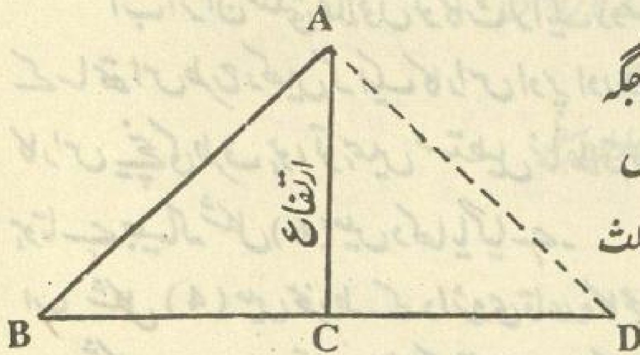


شکل (2)

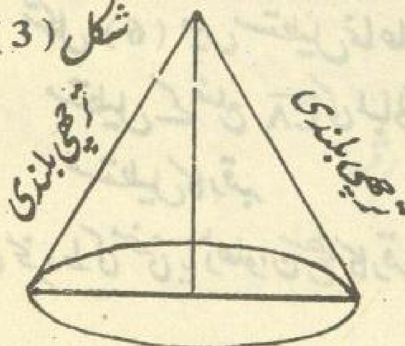
مخروط کی دو سطحیں ہوتی ہیں:

(i) منحنی سطح (ii) دائروی سطح

12.2 مخروط کی ڈھلوان یا ترچھی بلندی



قائمۃ الزاویہ مثلث کی شکل کا ایک گتّا کاٹ کر کسی جگہ پر اس طرح سے رکھیں کہ اس کا ایک بازو عمودی سمت میں اور دوسرا بازو افقی سمت میں ہو۔ اب قائمۃ الزاویہ مثلث اور مخروط کے درمیان تعلق کو دیکھتے ہیں۔



شکل (3)

ΔABC کا قاعدہ $\overline{BC}$، مخروطہ کے قاعدے کا رداس ہے۔

ΔABC کا عمود یا ارتفاع $\overline{AC}$ مخروط کا ارتفاع ہے۔ اور

ΔABC کا وتر $\overline{AB}$ دراصل مخروط کی ترچھی بلندی ہے۔

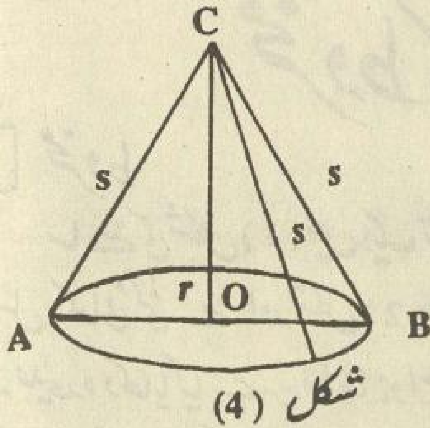
یعنی ہم کہہ سکتے ہیں کہ

ΔABC کا وتر = مخروط کی ترچھی بلندی

لہٰذا مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

مثلث قائمۃ الزاویہ کا وتر = $\sqrt{(\text{ارتفاع کی مقدار})^2 + (\text{قاعدہ کی مقدار})^2}$

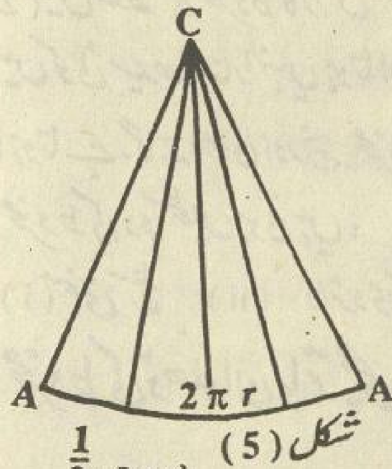
یا مخروط کی ترچھی بلندی = $\sqrt{(\text{قاعدہ کا رداس})^2 + (\text{ارتفاع کی مقدار})^2}$



شکل (4)

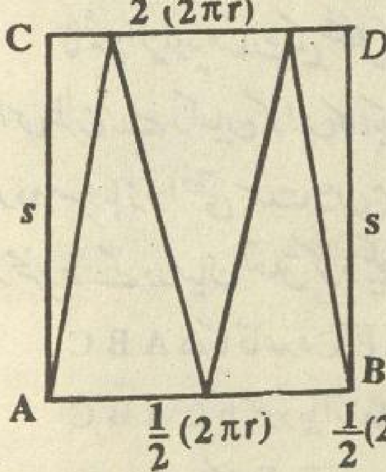
12.3 مخروط کا سطحی رقبہ

سامنے شکل (4) میں ایک مخروط کی شکل دکھائی گئی ہے جس کا راس C ہے۔ قاعدے AB کے محیط کا ہر نقطہ راس C سے مساوی فاصلے s پر ہے۔ اب اگر ضلع $\overline{CA}$ کے ساتھ ساتھ مخروط کو کاٹ دیا جائے تو اس کی ڈھلوان سطح کھل کر ایک قطعہ دائرہ (Sector) کی شکل اختیار کرلے گی۔ جیسا کہ شکل (5) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (5)

اگر قطعہ دائرہ کی قوس AA کو بہت سے چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا جائے اور نقاط تقسیم کو قطعاتِ خط کے ذریعے C سے ملایا جائے تو قطعہ دائرہ بہت سے چھوٹے چھوٹے مثلث نما علاقوں میں تقسیم ہو جاتا ہے۔ جیسا کہ شکل (5) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (6)

اب اگر ان مثلثی علاقوں کو کاٹ کر ایک دوسرے کے ساتھ اس طرح رکھیں کہ ایک کا راس اوپر اور دوسرے کا راس نیچے کی طرف ہو، تو ہمیں مستطیل نما علاقہ حاصل ہوتا ہے جیسا کہ شکل (6) میں دکھایا گیا ہے۔

اب شکل (4) میں مخروطہ کے دائروی قاعدہ کا محیط = $2\pi r$

شکل (5) میں قطعہ دائرہ کی قوس AA کی لمبائی = $2\pi r$

شکل (6) میں مستطیل نما علاقے کے ضلع $\overline{AB}$ کی لمبائی = $\frac{1}{2}(2\pi r)$

مستطیل کے ضلع $\overline{CA}$ کی لمبائی = s

مستطیل کا رقبہ = $s \times \pi r$

پس مخروط کی منحنی یا ڈھلوان سطح کا رقبہ = $\pi r s$

= (ترچھی سطح کی لمبائی) (قاعدہ کا رداس) π

شکل (4) میں دائروی علاقہ کا رقبہ = πr^2

پس مخروط کی سطح کا کل رقبہ = مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ + دائروی علاقہ کا رقبہ

$= \pi r^2 + \pi r s$

$= \pi r (r + s)$

مثال 1۔ ایک ٹھوس مخروط کے دائروی قاعدے کا رداس 7 سینٹی میٹر اور ترچھی بلندی 10 سینٹی میٹر ہے۔ اس کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل:

قاعدے کا رداس = $r = 7$ سینٹی میٹر

ترچھی بلندی = $s = 10$ سینٹی میٹر

منحنی سطح کا رقبہ = $\pi r s$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10$

$= 220$ مربع سینٹی میٹر

مثال 2۔ ایک مخروط دائروی قاعدے کا رداس 6 سینٹی میٹر اور ارتفاع 8 سینٹی میٹر ہے۔ مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ نیز کل سطح کا رقبہ کتنا ہوگا؟

حل:

مخروط کے قاعدے کا رداس = $r = 6$ سینٹی میٹر

مخروط کا ارتفاع = $h = 8$ سینٹی میٹر

ڈھلوان سطح = $s = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= \sqrt{36 + 64}$

$= \sqrt{100}$

$= \sqrt{10^2}$

پس $s = 10\ cm$

مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ = $\pi r s$

$= \frac{22}{7} \times 6 \times 10$

$= 188.57$ مربع سینٹی میٹر

مخروط کی کل سطح کا رقبہ $= \pi r(r+s)$

$= \frac{22}{7} \times 6(6+10)$

$= \frac{22}{7} \times 6 \times 16$

$= \frac{2112}{7}$

$= 301.71$ مربع سینٹی میٹر (تقریباً)

12.4 مخروط کا حجم

مخروط کے حجم کو سمجھنے کے لیے ہم ایک ایسا بیلن لیتے ہیں جو کھو کھلا اور ایک طرف سے کھلا ہوا ہو۔ اور ایک ایسا کھوکھلا مخروط لیتے ہیں. جن کے قاعدے متماثل ہوں اور اُن کا ارتفاع بھی ایک ہی ہو۔ اب ہم مخروط کو تیل یا پانی سے بھرتے ہیں اور پھر اس کو بیلن میں ڈال دیتے ہیں۔ یہی عمل دوسری مرتبہ کرتے ہیں۔ اور جب یہی عمل تیسری مرتبہ دہراتے ہیں تو بیلن تیل یا پانی سے پُر ہو جاتا ہے۔

اس سے ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ بیلن کو بھرنے کے لیے مخروط کو تین مرتبہ بھرنا ہوتا ہے۔ یعنی

بیلن کا حجم = مخروط کے حجم کا تین گنا

مخروط کا حجم = $\frac{1}{3}$ (بیلن کا حجم)

لیکن ہم جانتے ہیں کہ

بیلن کا حجم $= \pi r^2 h$ مکعب اکائی

یہاں r رداس اور h ارتفاع کو ظاہر کرتا ہے۔

پس

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

مثال 1۔ ایک مخروط خیمے کے قاعدے کا رداس 8 میٹر اور اس کا ارتفاع 42 میٹر ہو تو اس کا حجم معلوم کیجیے؟

حل: مخروط خیمے کے قاعدے کا رداس $= r = 8$ میٹر

ارتفاع $= h = 42$ میٹر

ہم جانتے ہیں کہ

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3} \pi r^2h$

r ، π اور h کی قیمتیں درج کرنے سے

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (8)^2 \times 42$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 64 \times 42$

پس مخروط کا حجم 2816 مکعب میٹر ہے۔

مثال 2-

ایک مخروطی جسم کے دائروی قاعدے کا قطر (رداس کا دگنا) 21 سینٹی میٹر ہے۔ اس کی ڈھلوان سطح کی بلندی 12 سینٹی میٹر ہے۔ تو (i) مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ (ii) قاعدہ کا رقبہ (iii) کل مخروطی سطح کا رقبہ اور (iv) حجم معلوم کیجیے۔

حل: اس سوال میں:

مخروط کے دائروی قاعدے کا رداس $= r = \frac{21}{2}$ سینٹی میٹر

ڈھلوان سطح کی بلندی $= s = 12$ سینٹی میٹر

(i) مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ $= \pi r s$

r ، π اور s کی قیمتیں درج کرنے سے

$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times 12$

$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times 12 = 396\ cm^2$

پس مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ 396 مربع سینٹی میٹر ہے۔

(ii) ہم جانتے ہیں کہ

مخروط کے قاعدے کا رقبہ = دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

π اور r کی قیمتیں درج کرنے سے

مخروط کے قاعدے کا رقبہ $= \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{2}\right)^2$

$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$

$$= \frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\cancel{2}} \times \frac{21}{2}$$

$$= \frac{693}{2}$$

پس مخروط کے قاعدے کا رقبہ 346.5 مربع سینٹی میٹر ہے۔

(iii) مخروط کی کُل سطح کا رقبہ $= \pi r(r+s)$

π ' r اور s کی قیمتیں درج کرنے سے

مخروط کی کُل سطح کا رقبہ $= \frac{22}{7} \times \frac{21}{2}\left(\frac{21}{2} + 12\right)$

$$= \frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\cancel{2}}\left(\frac{21+24}{2}\right)$$

$$= 11 \times 3 \times \frac{45}{2}$$

$$= \frac{1485}{2}$$

پس مخروط کی کُل سطح کا رقبہ 742.5 مربع سینٹی میٹر ہے۔

(iv) مخروطی جسم کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

h کی قیمت معلوم کرنے کے لیے مسئلہ فیثا غورث استعمال کرتے ہیں۔

$$h = \sqrt{s^2 - r^2}$$

s اور r کی قیمتیں درج کرنے سے

$$h = \sqrt{(12)^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{144 - \frac{441}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{576-441}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{135}{4}} = 5.8\ cm$$

تواب

$$\text{مخروطی جسم کا حجم} = \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times\left(\frac{21}{2}\right)^2\times 5.8$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}}\times\frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{2}\times\frac{21}{\cancel{2}}\times 5.8$$

$$= \frac{1339.8}{2}$$

پس مخروطی جسم کا حجم 669.9 مکعب سینٹی میٹر (تقریباً) ہے۔

مشق 12.1

1۔ مندرجہ ذیل مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ :

(i) $h = 15\ cm$, $r = 10\ cm$ (ii) $s = 12\ cm$, قطر $= d = 10\ cm$

(iii) $s = 20\ cm$, $r = 7\ cm$ (iv) $s = 16\ cm$, قطر $= d = 8\ cm$

(v) $r = 6\ cm$, $h = 7\ cm$ (vi) $r = 5\ cm$, $h = 15\ cm$

(vii) $r = 3.6\ dm.$, $h = 5\ dm$ (viii) $r = 7\ cm$, $h = 10\ cm$

2۔ مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ اگر قاعدے کا رداس 12 سینٹی میٹر اور ڈھلوان بلندی 28 سینٹی میٹر ہو۔

3۔ اگر ایک مخروط کے قاعدے کا رداس 35 سینٹی میٹر اور ڈھلوان بلندی 50 سینٹی میٹر ہو تو اس کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

4۔ مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے، جبکہ اس کے قاعدے کا رداس 7.5 سینٹی میٹر اور ڈھلوان بلندی 14 سینٹی میٹر ہے۔

5۔ اگر ایک مخروطی خیمے کا رداس 350 سینٹی میٹر اور اس کی ڈھلوان بلندی 400 سینٹی میٹر ہو تو اس کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

6۔ اگر ایک مولی کے قاعدے کا قطر 4.8 سینٹی میٹر اور اس کی ڈھلوان بلندی 7.5 سینٹی میٹر ہو تو اس کی منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

7۔ ایک مخروطی چھت 360 سینٹی میٹر بلند ہے اور اس کے قاعدے کا قطر 220 سینٹی میٹر ہے۔ تو بتائیے کہ چھت میں لگانے کے لیے مختلف رنگوں پر مشتمل کتنا کاغذ درکار ہوگا؟

8۔ اگر ایک ٹین کی قیف کی ڈھلوان سطح 9 سینٹی میٹر ہو۔ اور قاعدے کا قطر 8.4 سینٹی میٹر ہو تو بتائیے کہ اس کے لیے ٹین کی کتنی چادر درکار ہوگی؟

9۔ ایک ٹھوس مخروطی جسم کے دائروی قاعدے کا قطر 14 سینٹی میٹر اور ڈھلوان سطح کی بلندی 8 سینٹی میٹر ہو تو (i) مخروط کی ڈھلوان سطح کا رقبہ (ii) قاعدہ کا رقبہ (iii) کل مخروطی سطح کا رقبہ اور (iv) اس کا حجم معلوم کیجیے۔

10۔ ایک ٹھوس مخروط کے دائروی قاعدے کا رداس 8 سینٹی میٹر اور ڈھلوان سطح کی بلندی 17 سینٹی میٹر ہو تو (i) مخروط کی ڈھلوان سطح کا رقبہ (ii) قاعدہ کا رقبہ (iii) کل مخروطی سطح کا رقبہ (iv) اور اس کا حجم معلوم کیجیے۔

جوابات

مشق 1.1

1.-(i) $A \subseteq B$ (ii) $D \subseteq C$ (iii) $F \subseteq E$ (iv) $H \subseteq G$ (v) $I \subseteq J$

2.(i) $\not\subseteq$ (ii) $\subseteq$ (iii) $\subseteq$ (iv) $\not\subseteq$ (v) $\subseteq$

3.-(i) تین واجب تحتی سیٹ: $\{2,6,10\}, \{4,8\}, \{2,4,6,\}$

غیر واجب تحتی سیٹ: $\{2,4,6,8,10\}$

(ii) تین واجب تحتی سیٹ: $\{a,b\}, \{b\}, \{a\}$

غیر واجب تحتی سیٹ: $\{a, b, c\}$

(iii) تین واجب تحتی سیٹ: $\{27,29\}, \{23,25\}, \{21\}$

غیر واجب تحتی سیٹ: $\{21,23,25,27,29\}$

(iv) تین واجب تحتی سیٹ: $\{11,13\}, \{12\}, \{11\}$

غیر واجب تحتی سیٹ: $\{11,12,13\}$

(v) تین واجب تحتی سیٹ: $\{15,20\}, \{10\}, \{5\}$

غیر واجب تحتی سیٹ: $\{5,10,15,20\}$

(vi) تین واجب تحتی سیٹ: $\{a,e,i\}, \{i,o\}, \{u,o\}$

غیر واجب تحتی سیٹ: $\{a,e,i,o,u\}$

نوٹ، تین واجب تحتی سیٹ جو جوابات میں دیے گئے ہیں، ضروری نہیں کہ طلبا بھی یہی سیٹ بنائیں۔

6-(i) $\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{3,5\}$ (ii) $\emptyset, \{a\}$

(iii) $\emptyset, \{3\}, \{6\}, \{9\}, \{12\}, \{3,6\}, \{3,9\}$ $\{3,12\}, \{6,9\}$, $\{6,12\}, \{9,12\}, \{3,6,9\}, \{3,6,12\}, \{3,9,12\}, \{6,9,12\}$, $\{3,6,9,12\}$

(iv) $\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1,0\}, \{-1,1\}, \{0,1\}, \{-1,0,1\}$

(v) $\emptyset, \{5\}$ (vi) $\emptyset$

7- A = C = P , B = E , D = H = Q , F = J , G = I

8- (i) $\{\emptyset,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$ (ii) $\{\emptyset,\{0\}\}$

(iii) $\{\emptyset,\{2\},\{4\},\{6\},\{8\},\{2,4\},\{2,6\},\{2,8\},$
$\{4,6\},\{4,8\},\{6,8\},\{2,4,6\},\{2,4,8\},\{2,6,8\},$
$\{4,6,8\},\{2,4,6,8\}\}$

(iv) $\{\emptyset,\{e\},\{f\},\{g\},\{e,f\},\{f,g\},\{e,g\},\{e,f,g\}\}$

(v) $\{\emptyset\}$ (vi) $\{\emptyset,\{77\},\{78\},\{77,78\}$

(vii) $\{\emptyset,\{44\},\{55\},\{66\},\{44,55\},\{44,66\},\{55,66\},\{44,55,66\}\}$

(viii) $\{\emptyset,\{6\},\{-6\},\{6,-6\}\}$ (ix) $\{\emptyset,\{99\}\}$

(x) $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\}$ $\{1,4\},\{2,3\},$
$\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},$
$\{1,2,3,4\}\}$ (xi) $\{\emptyset,\{-1\},\{-2\},\{-1,-2\}\}$

(xii) $\{\emptyset,\{3\},\{-4\},\{3,-4\}\}$

مشق 1.2

1- (i) $\{2,3,4,5,6,8,10\}$ (ii) $\{2,3,4,5,6,7\}$

(iii) $\{2,3,5,7,8,10\}$ (iv) $\{2,3,4,5,6,7\}$

(v) $\{2,3,4,5,6,8,10\}$ (vi) $\{2,3,5,7,8,10\}$

(vii) مساوی ہیں (viii) مساوی ہیں (ix) مساوی ہیں

2- (i) $\{2,4\}$ (ii) $\{2,4,6,8\}$ (iii) $\{1,2,3,4\}$

(iv) $\{2,4\}$ (v) $\{2,4,6,8\}$ (vi) $\{1,2,3,4\}$

(vii) مساوی ہیں (viii) مساوی ہیں (ix) مساوی ہیں

4- (i) $\{11,13,15,17,19\}$ (ii) $\{11,13,15\}$

(iii) $\{12,14\}$ (iv) $\{12,14,16,18,20\}$

(v) $\{16,18,20\}$ (vi) $\{17,19\}$

5- (i) Ø (ii) {20, 22, 24, 26, 28, 30} (iii) {23, 29}
(iv) B (v) A (vi) U

6- (i) {1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}
(ii) {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
(iii) {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
(iv) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20}
(v) {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
(vi) {2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}
(vii) {4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}
(viii) {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19} (ix) {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 19}
(x) {2} (xi) {4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}
(xii) {1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

7- (i) Ø (ii) {*b,c,d*} (iii) {*b,c,d*}
(iv) Ø (v) {*a,e,f,g*} (vi) {*b,c,d*}

مشق 2.1

1- (i) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (ii) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
(iii) {−9, −8, . . ., −3, −2, −1} (iv) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
(v) {−7, . . ., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

2- (i) > (ii) > (iii) < (iv) < (v) < (vi) <

3- (i) + 9 (ii) + 3 (iii) − 6 (iv) − 4 (v) − 6 (vi) 0

4- (i) +10 (ii) + 16 (iii) − 10 (iv) − 21 (v) −40 (vi) + 20

5- (i) + 3 (ii) −3 (iii) + 11 (iv) −11 (v) + 4 (vi) −3

6- (i) +12 (ii) +20 (iii) − 25 (iv) + 4 (v) − 34 (vi) + 44

7- (i) − 108 (ii) +120 (iii) + 120 (iv) − 140 (v) 0 (vi) − 1000

8- (i) +4 (ii) − 15 (iii) −5 (iv) +20 (v) 0 (vi) +1

9- (i) − 1 (ii) − 35 (iii) + 6 (iv) − 70 (v) − 34 (vi) + 44

(vii) + 14 (viii) − 1 (ix) −24 (x) +1

مشق 2.2

1. مکمل اعداد کا سیٹ، صحیح اعداد کا سیٹ، قدرتی اعداد کا سیٹ
ناطق اعداد کا سیٹ، مرکب اعداد کا سیٹ، جفت اعداد کا سیٹ

2. (i) خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع (ii) جمعی ذاتی عنصر کا وجود

(iii) خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب (iv) خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع

(v) ضربی معکوس (vi) ضربی معکوس

(vii) ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع (viii) خاصیت تلازم بلحاظ جمع

(ix) خاصیت تلازم بلحاظ جمع (x) خاصیت تلازم بلحاظ ضرب

(xi) ضربی ذاتی عنصر کا وجود (xii) ضربی معکوس

3- (i) $1\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{13}{21}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $1\frac{1}{4}$ (v) $\frac{5}{12}$ (vi) $\frac{7}{36}$

4- (i) صفر کا ضربی معکوس نہیں ہوتا (ii) $-\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{5}{2}$ (iv) -3

(v) $\frac{1}{15}$ (vi) $-\frac{9}{5}$ (vii) $\frac{21}{20}$ (viii) $\frac{11}{9}$ (ix) $-\frac{5}{2}$ (x) $-\frac{11}{5}$

نوٹ: طلبار جمعی معکوس خود معلوم کریں۔

مشق 3.1

(1) $4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ (2) $2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

(3) $6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ (4) $2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

(5) $8 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0$ (6) $5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

(7) $7 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

(8) $2 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

(9) $2 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0$ (10) 1×10^4

مشق 3.2

(1) 111111_2 (2) 1001000_2 (3) 1100001_2 (4) 1111111_2
(5) 10110100_2 (6) 11001000_2 (7) 1011001_2 (8) 10011110_2
(9) 10011011_2 (10) 1000101011_2 (11) 1111101000_2 (12) 1111111011_2

مشق 3.3

(1) 5 (2) 6 (3) 59 (4) 15 (5) 63
(6) 109 (7) 23 (8) 171 (9) 29 (10) 127

مشق 3.4

1- (1) 1001 (2) 1111 (3) 10101 (4) 110100
(5) 11011 (6) 10110 (7) 11100 (8) 11001
(9) 111011 (10) 111010 (11) 100100 (12) 1011011

2- (1) 1010 (2) 1010 (3) 1000 (4) 10101 (5) 101010
(6) 1110 (7) 1110 (8) 1001 (9) 111 (10) 111
(11) 10001 (12) 101011

مشق 3.5

(1) 1111 (2) 11110 (3) 111100 (4) 1001110 (5) 100011
(6) 11010010 (7) 10010110 (8) 101101 (9) 111100 (10) 1010000001

مشق 3.6

1- (i) 133_5 (ii) 202_5 (iii) 342_5 (iv) 2011_5
(v) 1230_5 (vi) 4240_5 (vii) 1103_5 (viii) 14414_5
(ix) 101334_5 (x) 220133_5

2- (i) 22 (ii) 38 (iii) 69 (iv) 124 (v) 125
(vi) 264 (vii) 585 (viii) 2158 (ix) 2170 (x) 618

مشق 3.7

1- (i) 1120 (ii) 10203 (iii) 10231 (iv) 112 (v) 113434
(vi) 424 (vii) 10001 (viii) 4402 (ix) 11232 (x) 30230

2- (i) 330 (ii) 133 (iii) 1311 (iv) 3032 (v) 1422

3- (i) 301 (ii) 10111 (iii) 43124 (iv) 20324 (v) 2424

مشق 3.8

(1) 302333 (2) 242 (3) 320042 (4) 3204003
(5) 203124 (6) 220034 (7) 114012 (8) 2224222
(9) 431440 (10) 10340220

مشق 4.1

(1) 11 (2) 14 (3) 18 (4) 25 (5) 80 (6) 32
(7) 192 (8) 904 (9) 119 (10) 97 (11) 3499 (12) 998

مشق 4.2

1- (i) 1.1 (ii) 2.1 (iii) 3.2 (iv) 11.7
(v) 0.024 (vi) 0.006957 (vii) 0.023 (viii) 11.45
(ix) 15.8 (x) 0.64

2- (i) 1.5 (ii) 1.4 (iii) 2.375 (iv) 2.8
(v) 0.1875 (vi) 1.30 (vii) 2.4 (viii) 0.4
(ix) 1.25 (x) 0.4167

مشق 4.3

1- (i) 1.414 (ii) 2.645 (iii) 2.828 (iv) 0.894

(v) 203.546 (vi) 0.422 (vii) 1.140 (viii) 5.936

(ix) 14.899 (x) 2.898

2- (i) 1.7320 (ii) 2.2361 (iii) 19.2784 (iv) 132.8646

(v) 23.0571 (vi) 15.3010 (vii) 2.7018 (viii) 6.6708

(ix) 21.2867 (x) 58.7963

مشق 4.4

(1) 0.3 (2) 0.1 (3) 0.6 (4) 0.2 (5) 0.9 (6) 0.3

(7) 0.4 (8) 0.1 (9) 0.5 (10) 0.1 (11) 0.7 (12) 0.2

(13) 0.6 (14) 0.8 (15) 0.5 (16) 0.7

مشق 4.5

(1) 41 (2) 32 روپے, 32 ممبر (3) 61.6 (4) 76 قطاریں (5) 20 طالبات ایک روپیہ فی طالبہ

(6) 6 (7) 5 (8) 3 (9) 3 (10) 112

(11) 389 (12) 99856 (13) 10000 (14) 1024 (15) 9801

(16) 41 (17) 60 (18) 3600 (19) 900

مشق 5.1

(1) $2a$ (2) c (3) $-b$ (4) $7x$

(5) $15-6x$ (6) $2pq$ (7) $3xy-10y^2$ (8) $2(a^2-2ab-b^2)$

(9) c^2-cd+d^2 (10) $12x-12$ (11) $-2a-3b-c+12ab-4ac$

(12) $3a$ (13) $2a$ (14) $2a-3b-6c$

(15) $-a+6b+72c+24d$ (16) $a-2b+6c-3d$ (17) $7p-4q$

(18) $265-23x$ (19) $-a+25$ (20) $497x-476$

مشق 5.2

(1) $9a^2+24a+16$ (2) $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{9}b^2$ (3) $\frac{9}{4}a^2+2ab+\frac{4}{9}b^2$

(4) $9x^2+30xy+25y^2$ (5) $25+20a+4a^2$ (6) $16a^2+40ab+25b^2$

(7) $\frac{x^2}{16}+\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{9}$ (8) $\frac{9x^2}{4}+\frac{6xy}{5}+\frac{4y^2}{25}$ (9) $b^2+\frac{4bc}{3}+\frac{4}{9}c^2$

(10) $\frac{9}{25}d^2+6dc+25c^2$ (11) $-24x^2-18xy-3y^2$ (12) $16a^2+18ab+5b^2$

(13) $\frac{25}{36}a^2+\frac{7}{6}ab+\frac{b^2}{2}$ (14) $13a^2b^2+24abc+13c^2$ (15) $90d^4+102d^2c^2+29c^4$

(16) 10404 (17) 10816 (18) 11025

(19) 41209 (20) 41616

مشق 5.3

(1) $4a^2-12a+9$ (2) $9x^2-12x+4$ (3) $\frac{9}{4}x^2y^2-\frac{3}{2}xy^2+\frac{1}{4}y^2$

(4) $\frac{x^2}{9}-\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{16}$ (5) $\frac{4a^2}{9}-4ab+9b^2$ (6) $9x^4-12x^2y^2+4y^4$

(7) $2a^2+2b^2$ (8) $4ab$ (9) $13a^2-24ab+13b^2$

(10) $\frac{97}{36}a^2-4ab+\frac{97}{36}b^2$ (11) 9604 (12) 9801 (13) 9025

(14) 38809 (15) 39204 (16) 3364 (17) $24ab$ (18) $2xy$

(19) $2ab$ (20) $24x$ (21) $9c^2$ (22) $4y^2$

مشق 5.4

(1) p^2-4q^2 (2) x^4-y^4 (3) $p^2x^2-q^2$ (4) $a^2b^2-c^2$

(5) $9x^2-y^2$ (6) $a^2b^2c^2-d^4$ (7) $9a^2-4b^2$ (8) a^4-4b^4

(9) $1-x^6$ (10) $a^2-b^2x^2$ (11) 3584 (12) 19575

(13) 899 (14) 2491 (15) 8075 (16) x^4-y^4

(17) $16a^4-81b^4$ (18) $256x^4-625y^4$ (19) $625a^4-256b^4$ (20) a^8-b^8

(21) 5 (22) 96 (23) 2

مشق 5.5

(1) a^2+5a+6 (2) $x^2+(b+c)x+bc$ (3) $p^2-pq-6q^2$

(4) $p^2+pq-20q^2$ (5) $b^2-7bc+10c^2$ (6) $d^2-22d+120$

(7) $4a^2+8ab+3b^2$ (8) $x^2+5xy+6y^2$ (9) x^2-4y^2

(10) $25y^2-9z^2$ (11) $x^2y^2-2dxy-3d^2$ (12) $a^2b^2c^2-2abcd-3d^2$

(13) $ac+bc+ad+bd$ (14) $abx^2+(3a+5b)x+15$

(15) $12a^2+11ab-15b^2$ (16) $30x^2-27xy+6y^2$

مشق 5.6

(1) $5x(2ax-1)$ (2) $y(y^3-y+1)$ (3) $2a(a^2+2a-4)$

(4) $m(x^2-x-2)$ (5) $3(2+3a+a^2)$ (6) $ax(x+2b)$

(7) $a(ab+b^2+c^2)$ (8) $4abc(c-3a)$ (9) $(a+b)(x+6)x$

(10) $\frac{x}{2}(a-b)$ (11) $(x+y)(3a+2b)$ (12) $(f+g)(5a+7b)$

(13) $\frac{1}{7}(ab-\frac{bc}{2}+\frac{cd}{3})$ (14) $\frac{1}{2a}(fg+xy+1)$ (15) $\frac{e}{9}(c+\frac{d}{2}-f)$

مشق 5.7

(1) $(a+c)(2b+3d)$ (2) $(f+h)(5g+2p)$ (3) $(f+g)(a+b)$

(4) $(y+z)(x+2u)$ (5) $(c+2d)(a+2b)$ (6) $(2a+3b)(3c+2d)$

(7) $(3g+5e)(f+h)$ (8) $(x+2a)(y+z)$ (9) $(a+c)(2b+3d)$

(10) $(f-g)(3k-5h)$

مشق 5.8

(1) $(a+5)^2$ (2) $(b+3)^2$ (3) $(x+y)^2$ (4) $(x+\frac{1}{2})^2$

(5) $(x+\frac{1}{x})^2$ (6) $(4b+5a)^2$ (7) $(5r+3s)^2$ (8) $(3yz+x)^2$

(9) $(4r+s)^2$ (10) $(2bc+5d)^2$ (11) $(2p+3q)^2$ (12) $(7f+5g)^2$

مشق 5.9

(1) $(b-3)^2$ (2) $(x-y)^2$ (3) $4(a-b)^2$ (4) $(y-\frac{1}{y})^2$

(5) $(x-\frac{1}{2})^2$ (6) $(1-xy)^2$ (7) $(4-f)^2$ (8) $(3fg-h)^2$

(9) $2(5a-7b)^2$ (10) $2(3b-4c)^2$

مشق 5.10

(1) $(x+y)(x-y)$ (2) $(p+q)(p-q)$ (3) $(p+2q)(p-2q)$

(4) $(ac+d)(ac-d)$ (5) $(x+5)(x-5)$ (6) $(7+x)(7-x)$

(7) $(14ab+5c)(14ab-5c)$ (8) $(12xyz+7)(12xyz-7)$

(9) $(f+g+8h)(f+g-8h)$ (10) $(x+y+9d)(x+y-9d)$

(11) $(5d^2+a^2+b^2)(5d^2-a^2-b^2)$ (12) $(x-y+t+v)(x-y-t-v)$

(13) $(a-b+2d+3c)(a-b-2d-3c)$

(14) $(2a+3b+3c-2d)(2a+3b-3c+2d)$

(15) $(2x^2+y^2+3s^2+4t^2)(2x^2+y^2-3s^2-4t^2)$

مشق 5.11

(1) $(x-1)(x+2)$ (2) $(x-1)(x+5)$ (3) $(x+1)(x-5)$

(4) $(a-2b)^2$ (5) $(p-6q)^2$ (6) $(x-3)(x-9)$

(7) $(x+3)(x+17)$ (8) $(x-5)(x-13)$ (9) $(x-5)^2$

(10) $(x+10)(x+12)$ (11) $(6x-y)(9x+y)$ (12) $(2a+1)(13a-1)$

(13) $(15x+1)(16x-1)$ (14) $(x-1)(43x+1)$ (15) $(1-2ab)(1-3ab)$

(16) $(xy-8)(xy+4)$ (17) $(12x-1)(13x+1)$ (18) $(1-5xy)^2$

(19) $(3xy-1)(17xy-1)$ (20) $(6ab-1)(7ab+1)$ (21) $(x+y)(17x-y)$

(22) $(3x+y)(18x+y)$ (23) $(3x-y)(18x+y)$ (24) $(3-x)(19-x)$

(25) $(xy-5)(xy-11)$

مشق 6.1

(1) $\{1\frac{1}{2}\}$ (2) $\{1\}$ (3) $\{2\}$ (4) $\{-1\frac{1}{4}\}$ (5) $\{-6\}$

(6) $\{-7\}$ (7) $\{31\frac{1}{4}\}$ (8) $\{6\frac{2}{3}\}$ (9) $\{11\frac{3}{5}\}$ (10) $\{6\frac{5}{9}\}$

(11) $\{6\frac{1}{2}\}$ (12) $\{5\frac{10}{13}\}$ (13) $\{-5\frac{1}{7}\}$ (14) $\{6\frac{3}{10}\}$ (15) $\{0\}$

(16) $\{-5\frac{1}{2}\}$ (17) $\{44\}$ (18) $\{-3.2\}$ (19) $\{1.96\}$ (20) $\{-2.25\}$

مشق 6.2

(1) 30 (2) 50 , 51 (3) 31 , 33 (4) 7 (5) 32 , 34

(6) 28 (7) 15 سال (8) $9\frac{1}{2}$ سال , 27 سال (9) 7 (10) 12 سال

(11) 16 (12) 18 سال , 54 سال (13) 1200 روپے ، 600 روپے

(14) 30 (15) 48 , 50 (16) 61800 روپے (17) 22.5 میٹر , 37.5 میٹر

(18) 20 میٹر (19) $\frac{35}{37}$ (20) 12 (21) پہلا زمیندار 800 بوریاں اور دوسرا زمیندار 2400 بوریاں

(22) 53.35 ملین (23) 57%

مشق 7.1

1- (i) 1:2 (ii) 1:3 (iii) 3:5 (iv) 2:5 (v) 2 . 5
(vi) 3:5 (vii) 7:9 (viii) 3:4

2- (i) 1:4 (ii) 7:30 (iii) 11:1000 (vi) 3:400 (v) 13:800
(vi) 8:201 (vii) 3:400 (viii) 4:25 (ix) 9:25 (x) 9:25

3. (i) 6 : 7 : 9 (ii) 20 : 35 : 63 (iii) 5 : 6 : 7 (iv) 6 : 10 : 9

(v) 33 : 48 : 70 (vi) 108 : 117 : 138 (vii) 32 : 88 : 55

(viii) 10 : 12 : 15

4. (i) 800 : 960 : 1800 : 2430 . (ii) 120 : 220 : 352 : 616

(iii) 390 : 468 : 1014 : 624

مشق 7.2

(1) 510 روپے (2) 31600 روپے (3) فیصل کا (4) 24 مزدور

(5) 45 طلبا (6) 12 دن (7) 9 مزدور (8) 3 دن

(9) ایک دن (10) 116246.24 گیلن

مشق 7.3

(1) 375000 (2) 10 مزدور (3) 5 آدمی (4) 6 آدمی (5) 12 دن

(6) 10 روپے (7) 16 دن (8) 288 روپے (9) 4500 روپے (10) 20 دن

(11) سلیم کے ہر ایک بچے کو ملیں گے 1000 روپے جب کہ احمد کے ہر ایک بچے کو ملیں گے 3333.33 روپے

مشق 8.1

(1) نفع $11\frac{7}{13}\%$ (2) نفع 40% (3) ایک کوٹ پر نقصان 58.34 روپے اور نفع 8%

(4) کل نقصان 46.66% (5) کل نفع 1000 روپے ، 11.11%

(6) ایک موٹر سائیکل پر منافع 2625 روپے، کل نفع 26250 روپے

(7) نفع 15% ، ایک ٹی وی سیٹ پر نفع 577.50 روپے (8) نفع $14\frac{2}{7}\%$

(9) نفع 20% ، 120 روپے

مشق 8.2

(1) 946.25 (2) 1020 روپے (3) 962.5 روپے

(4) 3600 روپے ، کل بچت 90 روپے زکوٰۃ (5) 2575 روپے (6) 42500 روپے

(7) 40000 روپے سالانہ بچت (8) 865 روپے (9) 78900 روپے

(10) 100000 روپے

مشق 8.3

(1) 1575 روپے (2) 2112 روپے (3) 2495 روپے (4) 2675 روپے

(5) 8590 روپے (6) 99980 روپے (7) 4960 روپے (8) 1780 روپے

(9) کچھ نہیں (10) 2050 روپے

مشق 8.4

1- (i) 5550 روپے (ii) 4875 روپے (iii) 4275 روپے

(iv) 9075 روپے (v) 26250 روپے

2- (i) 337500 روپے (ii) 775000 روپے (iii) 1142857.14 روپے

(iv) 332500 روپے (v) 1896000 روپے

مشق 10.1

1- (i) 4 سم (ii) 10 سم (iii) $\sqrt{31}$ سم (iv) 6 سم (v) 12 سم

(vi) $\sqrt{10}$ سم (vii) $2\sqrt{11}$ سم (viii) $\sqrt{114}$ سم

2- (i) $2, 30^0$ (ii) $\sqrt{5}, 60^0$ (iii) $2\sqrt{2}, 45^0$

3- $\sqrt{109}$ کلومیٹر (4) 17 میٹر (5) 25 میٹر (6) 4 سم

(7) 6 میٹر (8) $4\sqrt{2}$ سم (9) 6 سم (10) 3.535 سم

(11) $3\sqrt{2}$ سم (12) 10 سم (13) $10\sqrt{7}$ سم (14) 30 سم

(15) 265.33 سم

مشق 10.2

1- (i) 7.5 مربع سم (ii) 18 مربع سم (iii) 12 مربع سینٹی میٹر

(iv) 75 مربع سم (v) 14 مربع سم (vi) 4.375 مربع سم

(vii) 16.875 مربع سم (viii) 40.625 مربع سم (ix) 33 مربع سینٹی میٹر

(x) 11.156 مربع سینٹی میٹر

2- (i) $4\sqrt{6}$ مربع سینٹی میٹر یا 9.8 مربع سینٹی میٹر (ii) 19.9 مربع سینٹی میٹر

(iii) 96 مربع سینٹی میٹر (iv) 146.91 مربع سینٹی میٹر (v) 55.0 مربع سینٹی میٹر

(vi) 7.83 مربع سینٹی میٹر (vii) 92.405 مربع سینٹی میٹر (viii) مثلث نہیں بن سکتا ہے۔

(ix) 6 مربع سینٹی میٹر (x) 24 مربع سینٹی میٹر

مشق 11.4

(1) 28.978 مربع سینٹی میٹر (2) 21.948 مربع سینٹی میٹر (3) 20.085 مربع سینٹی میٹر

(4) 60 مربع سینٹی میٹر (5) 172.5 مربع سینٹی میٹر

مشق 12.1

1- (i) 566.36 مربع سینٹی میٹر (ii) 188.50 مربع سینٹی میٹر (iii) 440 مربع سینٹی میٹر

(iv) 201.06 مربع سینٹی میٹر (v) 173.78 مربع سینٹی میٹر (vi) 248.46 مربع سینٹی میٹر

(vii) 69.68 مربع سینٹی میٹر (viii) 268.44 مربع سینٹی میٹر

(2) 1056 مربع سینٹی میٹر (3) 5500 مربع سینٹی میٹر (4) 330 مربع سینٹی میٹر

(5) 825000 مربع سینٹی میٹر (6) 56.57 مربع سینٹی میٹر (7) 130137.228 مربع سینٹی میٹر

(8) 118.8 مربع سینٹی میٹر (9) (i) $176 cm^2$ (ii) $154 cm^2$ (iii) $330 cm^2$

(iv) $198.762 cm^3$

(10) (i) $427.428 cm^2$ (ii) $201.142 cm^2$ (iii) $628.57 cm^2$ (iv) $1005.714 cm^3$

تیار کردہ: سندھ ٹیکسٹ بک بورڈ، جام شورو، سندھ
منظور شدہ محکمہ تعلیم حکومتِ پاکستان بطور واحد نصابی کتاب
برائے مدارس صوبہ سندھ
(قومی کمیٹی برائے جائزہ کُتب نصاب کی تصحیح شدہ)

پاکستان کا قومی ترانہ

پاک سر زمین شاد باد — کشورِ حسین شاد باد
تو نشانِ عزمِ عالی شان — ارضِ پاکستان
مرکزِ یقین شاد باد
پاک سر زمین کا نظام — قوتِ اُخوتِ عوام
قوم مُلک، سلطنت — پائندہ، تابندہ باد
شاد باد منزلِ مُراد
پرچمِ ستارہ و ہلال — رہبرِ ترقی و کمال
ترجمانِ ماضی، شانِ حال — جانِ استقبال
سایۂ خدائے ذوالجلال

کوڈ نمبر: 111 — سیریل نمبر: 15290

تاریخِ اشاعت	ایڈیشن	تعدادِ اشاعت	قیمت
جنوری ۱۹۹۹ء	اوّل	40,000	25-80